

MAGNETOMOTORNA SILA KAVEZNOG ROTORA INDUKCIONE MAŠINE

Gojko Joksimović, Momir Đurović¹

Ključne riječi Indukciona mašina, kavezni rotor, magnetomotorna sila, funkcija namotaja, funkcija broja navojaka, spektar struje statora, rotorovi žljebni harmonici.

SAŽETAK:

U radu se, korišćenjem pojma funkcije namotaja, definiše i analizira magnetomotorna sila (mms) kaveznog rotora indukzione mašine. U uvodnom dijelu je prikazan način definisanja funkcije namotaja idealne mašine. Tako definisana funkcija namotaja iskorišćena je za definisanje talasa mms kaveznog namotaja rotora indukzione mašine. Dobijeni talasi mms, odnosno talasi gustine magnetskog fluksa u slučaju uniformnog vazdušnog procjepa, analizirani su sa aspekta njihovog povratnog dejstva na namotaje statora.

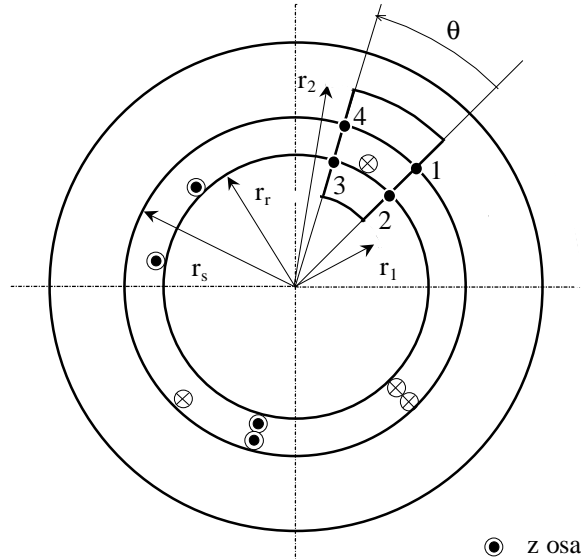
1. UVOD

Detekcija različitih kvarova indukzione mašine sa kaveznim rotorom putem analize spektralnog sastava struje statora privukla je mnogo pažnje u poslednjih nekoliko godina. Kako je struja u namotajima, pored spoljašnjeg napona, posledica indukovane elektromotorne sile (ems) odnosno gustine magnetskog fluksa, u cilju detekcije i identifikacije kvara mora biti provedena analiza gustine magnetskog fluksa u vazdušnom procjepu ispravne mašine.

Treba napomenuti, još na samom početku, da su samo vremenski harmonici gustine magnetskog fluksa oni koji se mogu detektovati sa strane statora. Takođe, bitno je naglasiti da, ti, vremenski harmonici, ne izazivaju i odgovarajuće promjene u ems namotaja statora, odnosno u strujama statora, na identičan način. Najočigledniji razlog za to jeste prostorna raspodjela namotaja u mašini i način njihovog povezivanja za svaku konkretnu mašinu.

U cilju određivanja raspodjele gustine magnetskog fluksa mora se poznavati raspodjela mms u vazdušnom procjepu indukzione mašine kao i permeansa vazdušnog procjepa. Sa druge strane, uslov poznavanja mms jeste poznavanje raspodjele namotaja po obimu vazdušnog procjepa.

¹Doc. dr Gojko Joksimović, Elektrotehnički fakultet, Podgorica.
Prof. dr Momir Đurović, Elektrotehnički fakultet, Podgorica.



Slika 1. Uz objašnjenje pojma funkcije namotaja

2. FUNKCIJA NAMOTAJA

Pojam *funkcije namotaja* (winding function), kao funkcije koja se vrlo često pojavljuje u analizi električnih mašina, prvi je definisao A.W. Rankin, [1]. Korišćenje koncepta funkcije namotaja u analizi električnih mašina kasnije je unaprijedio Lipo, primjenjujući ga prevashodno u analizi rada sinhronne mašine, [1].

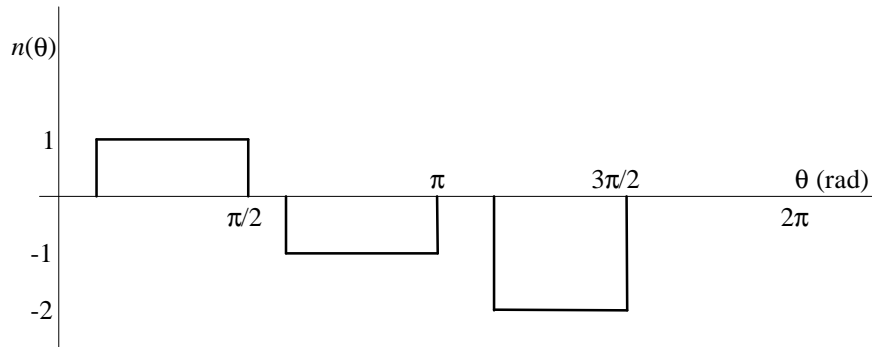
Neka je poprečni presjek standardne indukcione mašine dat na slici 1. Vazdušni procjep je uniforman i njegova dužina je mala u odnosu na poluprečnik rotora. Poluprečnik statora i rotora su definisani kao r_s i r_r respektivno. U vazdušnom procjepu je postavljen namotaj sa N navojaka kroz koji protiče struja i . Pretpostavljeno je, takođe, da provodnici nijesu iskošeni duž aksijalne ose mašine. Slika 1. prikazuje slučaj za $N=4$. Pretpostavljajući stacionaran rotor, u ovom trenutku nije potrebno namotaj vezivati za pojam statora ili rotora.

Pretpostavljeno je da svaki navojak ima zanemariv poprečni presjek. Proizvoljno je izabrana referentna tačka na obimu statora od koje se mjeri ugao θ . Po Amperovom zakonu, za proizvoljnu zatvorenu konturu 12341 prikazanu na slici, gdje je dio konture 12 usmjeren duž referentne ose, $\theta=0$, od statora ka rotoru a dio konture 34 duž proizvoljne ose $0<\theta<2\pi$ od rotora ka statoru, slijedi:

$$\oint_{12341} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1)$$

gdje je S površina koju definiše kontura 12341. Kako kroz namotaj protiče ista struja to se gornji integral može pisati kao:

$$\oint_{12341} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = n(\theta) \cdot i \quad (2)$$



Slika 2. Funkcija broja navojaka za namotaj sa slike 1.

gdje je $n(\theta)$ funkcija broja navojaka (turns function) i definiše broj navojaka obuhvaćenih konturom 12341. Kako smjer struje u provodniku obuhvaćenom konturom odgovara pravilu desne ruke za smjer obilaska konture, za gornju konturu je $n(\theta)=1$. Za ukupni namotaj prikazan na slici 1. funkcija broja navojaka prikazana je na slici 2.

Razlažući integral (2) na komponente, koje predstavljaju padove magnetskog napona na pojedinim dionicama dobijamo sledeće mms:

$$M_{12} + M_{23} + M_{34} + M_{41} = n(\theta) \cdot i \quad (3)$$

gdje su:

$$M_{12} = \int_{r_s}^{r_r} H_r(r,0) dr \quad (4)$$

$$M_{23} = \int_{r_r}^{r_1} H_r(r,0) dr + \int_0^{\theta} r_1 H_{\theta}(r_1, u) du + \int_{r_1}^{r_r} H_r(r, \theta) dr \quad (5)$$

$$M_{34} = \int_{r_r}^{r_s} H_r(r, \theta) dr \quad (6)$$

$$M_{41} = \int_{r_s}^{r_2} H_r(r, \theta) dr + \int_{\theta}^0 r_2 H_{\theta}(r_2, u) du + \int_{r_2}^{r_s} H_r(r, 0) dr \quad (7)$$

Ako se zanemare efekti deformacije polja na krajevima mašine, i radijalna H_r i tangencijalna H_{θ} komponenta vektora jačine magnetskog polja su nezavisne od z koordinate, gdje je z osa, osa koja se poklapa sa osom rotora.

U cilju rešavanja gornjeg sistema jednačina čini se pretpostavka zbog koje se ova analiza i naziva analizom idealne mašine. Kao što je to uobičajeno u analizi električnih mašina, znajući da je permeabilnost magnetskog jezgra nekoliko hiljada puta veća od permeabilnosti vazduha, pad magnetskog napona u gvoždju se ekvivalentira povećanjem vazdušnog procjepa, korišćenjem Karterovih koeficijenata, [2], i sva se analiza svodi na analizu procesa u vazdušnom procjepu. Saglasno gornjem, ubuduće se pod dužinom

vazdušnog procjepa smatra efektivna dužina vazdušnog procjepa, znači realna dužina množena Karterovim koeficijentima. Dakle, jednačina (3) se svodi na:

$$M_{12}(0) + M_{34}(\theta) = n(\theta) \cdot i \quad (8)$$

Kako je i efektivna dužina vazdušnog procjepa mala u poređenju sa poluprečnikom rotora, komponenta H_r se može smatrati konstantnom duž vazdušnog procjepa:

$$M_{12}(0) = -H_r(r_s, 0) \cdot g \quad (9)$$

$$M_{34}(\theta) = H_r(r_s, \theta) \cdot g \quad (10)$$

gdje je g efektivna dužina vazdušnog procjepa. Gornje dvije jednačine nije moguće riješiti bez dodatnog uslova. Taj dodatni uslov se dobija primjenom Gausove teoreme primijenjene na magnetska polja,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (11)$$

gdje je S površina cilindra koji obuhvata rotor ali ne i stator mašine sa slike 1. Kako sav magnetski fluks koji se obuhvata sa rotorom prolazi kroz vazdušni procjep, fluks kroz baze cilindra jednak je nuli. Kako je ranije pretpostavljena beskonačna permeabilnost statora i rotora, čitav fluks prolazi kroz zid cilindra pod pravim uglom. Uz gornje pretpostavke jednačina (11) se svodi na,

$$\mu_o \int_0^l \int_0^{2\pi} r H_r(r, \theta) d\theta dz = 0, \quad r_r \leq r \leq r_s \quad (12)$$

gdje je μ_o permeabilnost vakuma ($\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$) a l efektivna dužina paketa limova statora (rotora). Gornji integral se svodi na:

$$\int_0^{2\pi} H_r(r, \theta) d\theta = 0 \quad (13)$$

Iz (10) slijedi:

$$\int_0^{2\pi} M_{34}(\theta) d\theta = 0 \quad (14)$$

Iz izraza (14) vidi se da bi ukupni fluks obuhvatanja rotora bio jednak nuli funkcija $M_{34}(\theta)$ ne smije imati srednju vrijednost. Integraleći izraz (8) dobija se:

$$\int_0^{2\pi} M_{12}(0) d\theta + \int_0^{2\pi} M_{34}(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} n(\theta) \cdot i \cdot d\theta \quad (15)$$

Iz (14) drugi član je jednak nuli. Kako su M_{12} i i nezavisni od ugla θ , slijedi:

$$M_{12}(0) = i \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(\theta) d\theta \right) \quad (16)$$

Izraz u zagradi u (16) je srednja vrijednost funkcije broja navojaka. Označavajući je kao,

$$\hat{n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(\theta) d\theta \quad (17)$$

slijedi:

$$M_{12}(0) = \hat{n} \cdot i \quad (18)$$

Iz (8) se konačno dobija,

$$M_{34}(\theta) = [n(\theta) - \hat{n}] \cdot i \quad (19)$$

Funkcija u uglastoj zagradi jeste *funkcija broja navojaka* od koje je oduzeta njena srednja vrijednost. Kao funkcija koja se često pojavljuje u analizi električnih mašina ona je dobila i svoje ime, i poznata je kao *funkcija namotaja*:

$$N(\theta) = n(\theta) - \hat{n} \quad (20)$$

Izostavljajući indekse, mms u bilo kojoj tački po obimu mašine se može predstaviti kao:

$$M(\theta) = N(\theta) \cdot i \quad (21)$$

Kao što se vidi iz izraza (21) funkcija namotaja je direktno vezana sa pojmom mms i može se definisati kao mms za jediničnu struju.

Izraz (20), primijenjen na jednu navojnu grupu na statoru (rotoru) sa N navojaka i proizvoljnim navojnim korakom od α rad, sa provodnicima postavljenim u žljebove opisane ugaonim koordinatama θ_1 i θ_2 , $\alpha = \theta_2 - \theta_1$, može se alternativno prikazati na sledeći način, [3]:

$$N(\theta) = \begin{cases} N \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right), & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ -N \cdot \frac{\alpha}{2\pi} & \text{za ostalo } \theta \end{cases} \quad (22)$$

3. MMS KAVEZNOG NAMOTAJA ROTORA

3.1. MMS ROTORA KAO POSLEDICA STRUJA ROTORA OSNOVNE UČESTANOSTI

Dva štapa rotora i segmenti prstena između njih čine petlju rotora. Ta dva štapa mogu biti bilo koja dva štapa po obimu rotora ali je uobičajeno da se pod petljom rotora podrazumijeva petlja koju čine dva susjedna štapa i odgovarajući segmenti prstena. Ova petlja se može smatrati jednom navojnom grupom koja ima samo jedan navojak. U skladu s tim, funkcija namotaja ove petlje, postavljajući njen centar u koordinatni početak, data je izrazom:

$$N_{petlje1}(\theta_r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{R}, & -\frac{\pi}{R} \leq \theta_r \leq \frac{\pi}{R} \\ -\frac{1}{R} & \text{za ostalo } \theta_r \end{cases} \quad (23)$$

gdje je R broj štapova rotora a θ_r je ugaon izražen u rotorovom koordinatnom sistemu. Jednostavno se može dobiti sledeći razvoj ove funkcije:

$$N_{petlje1}(\theta_r) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2}{v\pi} \sin\left(v \frac{\pi}{R}\right) \cos(v\theta_r) \quad (24)$$

Struja rotora osnovne učestanosti ($s\omega_1$) protičući kroz ovu petlju proizvodi sledeću mms:

$$M_{petlje1}(t, \theta_r) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2}{v\pi} \sin\left(v \frac{\pi}{R}\right) I_{rm} \cos(s\omega_1 t) \cos(v\theta_r) \quad (25)$$

odnosno,

$$M_{petlje1}(t, \theta_r) = \sum_{v=1}^{\infty} \left[K_v \cos(v\theta_r + s\omega_1 t) + K_v \cos(v\theta_r - s\omega_1 t) \right] \quad (26)$$

U drugoj petlji, koja je u prostoru pomjerena za jedan "navojni korak" tj. za $2\pi/R$, protiče struja iste, osnovne učestanosti ($s\omega_1$) i iste amplitude, ali sa razlikom u fazi $p \cdot 2\pi/R$, gdje je p broj pari polova. Ona proizvodi svoju mms koja ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} M_{petlje2}(t, \theta_r) &= \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \left[K_v \cos\left(v\theta_r + s\omega_1 t - (v+p) \frac{2\pi}{R}\right) + K_v \cos\left(v\theta_r - s\omega_1 t - (v-p) \frac{2\pi}{R}\right) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Na sličan način može se pokazati i za ostale petlje rotora. Može se pokazati da rezultantna mms rotora ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} M_{rot}(t, \theta_r) &= \\ &= \sum_{i=0}^{R-1} \sum_{v=1}^{\infty} \left[K_v \cos\left(v\theta_r + s\omega_1 t - i \cdot (v+p) \frac{2\pi}{R}\right) + K_v \cos\left(v\theta_r - s\omega_1 t - i \cdot (v-p) \frac{2\pi}{R}\right) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Iz izraza (28) jasno se vidi da talasi mms različiti od nule postoje samo za $v=p$ kao i za $v+p=\pm\lambda R$ i za $v-p=\pm\lambda R$, tj. za $v=\pm\lambda R-p$ i $v=\pm\lambda R+p$ gdje je $\lambda=1,2,3\dots$ Kako v po svojoj prirodi može biti samo pozitivan cio broj to slijedi da samo za $v=p$, $v=\lambda R+p$ i $v=\lambda R-p$ egzistiraju talasi mms rotora različiti od nule. Dakle, pored osnovnog harmonika mms rotora ($v=p$), koji je reakcija armature na osnovni harmonik mms sa strane statora, postoje i rotorovi žljebni harmonici reda $\lambda R \pm p$.

Slika 3. prikazuje oblik osnovnog talasa mms rotorovog kaveznog namotaja motora sa $R=32$ štapa i $p=2$ para polova, u jednom trenutku vremena, uz pretpostavku da je maksimum struje petlje rotora 1A. Na slici 4. je prikazan spektralni sastav ove mms. Vidi se da pored osnovnog, postoje samo žljebni harmonici rotora, $R-p$ i $R+p$, $2R-p$ i $2R+p$ itd. tj. 30, 34, 62, 66-ti.

Dakle, struje rotora osnovne učestanosti proizvodit će pored osnovnog talasa mms (reakcija armature) i sledeće talase:

$$M_{rot1}(t, \theta_r) = M_{rot11} \cos((\lambda R - p)\theta_r + s\omega_1 t) + M_{rot12} \cos((\lambda R + p)\theta_r - s\omega_1 t) \quad (29)$$

ili, posmatrano sa strane statora, koristeći transformaciju $\theta = \theta_r + \omega_1 t \cdot ((1-s)/p)$,

$$\begin{aligned} M_{rot1}(t, \theta) &= M_{rot11} \cos\left(\left(1 - \lambda \frac{R}{p}(1-s)\right)\omega_1 t + (\lambda R - p)\theta\right) + \\ &+ M_{rot12} \cos\left(\left(1 + \lambda \frac{R}{p}(1-s)\right)\omega_1 t - (\lambda R + p)\theta\right) \end{aligned} \quad (30)$$

```
Title: m m s3.eps  
Creator: MATLAB, The Mathworks, Inc.  
CreationDate: 06/13/98 13:04:29
```

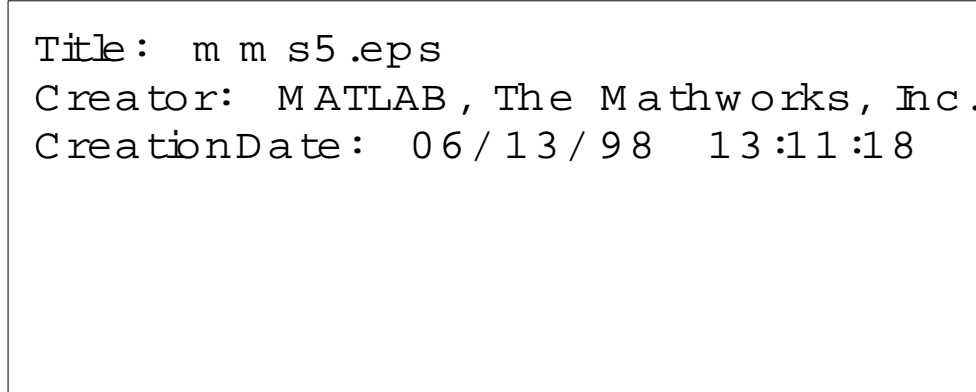
Slika 3. Mms kaveznog namotaja rotora ($R=32$, $p=2$).

```
Title: m m s4.eps  
Creator: MATLAB, The Mathworks, Inc.  
CreationDate: 06/13/98 13:07:49
```

Slika 4. Spektralni sastav mms sa slike 3.

3.2. MMS ROTORA KAO POSLEDICA STRUJA ROTORA VIŠIH UČESTANOSTI

Prostorni harmonici gustine magnetskog fluksa sa strane statora izazivaju i vremenske harmonike ems a time i struje u kolu rotora, koji takođe učestvuju u stvaranju ukupne mms u vazdušnom procjepu. Tako μ - p -ti harmonik mms statora indukuje μ - p -ti harmonik mms rotora koji pored "odgovora" na taj harmonik (reakcije armature) daje i rotorove žljebne harmonike. Kako je red harmonika sa strane statora veći, broj štapova rotora po jednom polu harmoničnog polja je znatno manji nego za osnovni harmonik pa je i oblik mms rotora nepravilniji, [4]. Samim tim je i odnos amplituda žljebnih harmonika prema "osnovnom" nepovoljniji. Na slici 5. prikazan je oblik mms rotorovog namotaja izazvane strujama rotora koje su posledica 5 - p -tog prostornog harmonika mms statora, uz pretpostavku, kao i ranije, da je maksimum struje petlje rotora ovog harmonika $1A$.

Slika 5. Peti harmonik mms kaveznog namotaja rotora ($R=32$, $p=2$, $\mu=-5$)

Kao što se vidi, mms kaveznog namotaja rotora je nepravilnog oblika, tako da će uz "osnovni" $5\cdot p$ -ti harmonik biti veoma izraženi i žljebni harmonici, $(R-5\cdot p)$ -ti, $(R+5\cdot p)$ -ti, $(2R-5\cdot p)$ -ti, $(2R+5\cdot p)$ -ti, itd. tj. 22, 42, 54, 74-ti. Spektralni sastav mms sa slike 5. je prikazan na slici 6.

Sa slike 6. vidimo da je odnos žljebnih prema "osnovnom" harmoniku sada mnogo nepovoljniji nego u slučaju prikazanom za osnovne struje rotora, slika 4.

Dakle, $\mu\cdot p$ -ti harmonik mms statora indukuje $\mu\cdot p$ -ti harmonik struje rotora koji stvara, pored mms koja je reakcija armature na gornji statorov harmonik i koji ga prigušuje, i rotorove žljebne harmonike:

$$M_{ro\mu}(t, \theta_r) = M_{ro\mu 1} \cos((\lambda R - \mu p)\theta_r + s_\mu \omega_1 t) + M_{ro\mu 2} \cos((\lambda R + \mu p)\theta_r - s_\mu \omega_1 t) \quad (31)$$

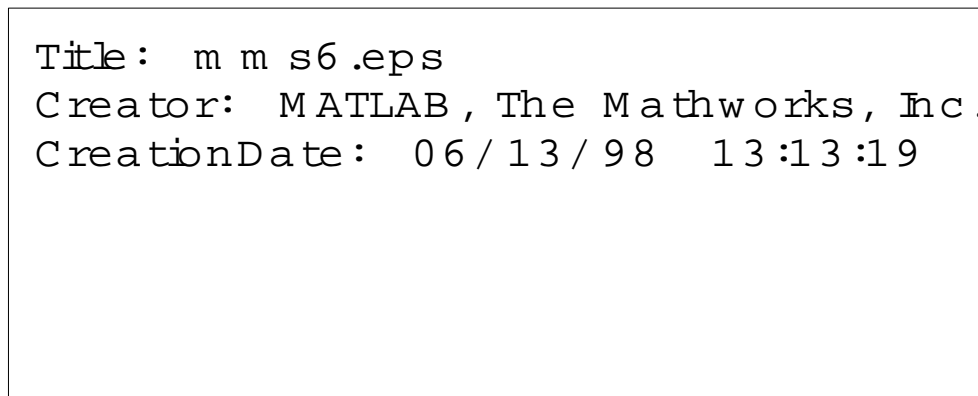
gdje je $s_\mu = 1 - \mu(1-s)$. Svodeći gornji talas na stranu statora, dobija se:

$$\begin{aligned} M_{ro\mu}(t, \theta) = & M_{ro\mu 1} \cos\left(\left(1 - \lambda \frac{R}{p}(1-s)\right)\omega_1 t + (\lambda R - \mu p)\theta\right) + \\ & + M_{ro\mu 2} \cos\left(\left(1 + \lambda \frac{R}{p}(1-s)\right)\omega_1 t - (\lambda R + \mu p)\theta\right) \end{aligned} \quad (32)$$

Rezultat prikazan relacijom (32) veoma je interesantan. Naime, poredeći (30) i (32) pokazuje se da bez obzira na red harmonika mms sa strane statora, rotor kaveznog tipa na taj harmonik pored direktnog odgovora na njega, tj. reakcije armature, daje i mms na učestanostima koje uopšte ne zavise od reda harmonika. Dakle, sve moguće talase mms sa strane statora kavezni rotor reflektuje na učestanostima $(1 \pm \lambda R(1-s)/p)f_1$, $\lambda=1,2,3,\dots$, [5].

4. ZAKLJUČAK

Kao rezultat prirode kaveznog namotaja rotora indukcionne mašine, svi talasi magnetomotorne sile (a u slučaju uniformnog vazdušnog procjepa i talasi gustine magnetskog fluksa) sa strane statora, rotor reflektuje ponovo na stranu statora pored osnovne učestanosti, na učestanostima koje su poznate kao rotorove žljebne učestanosti, $(1 \pm \lambda R(1-s)/p)f_1$.



Slika 6. Spektralni sastav mms sa slike 5.

Kao posledica ove činjenice, u spektru struje statora će se pojaviti struje na na ovim učestanostima. Položaj ovih komponenti struje zavisi od aktuelne brzine rotora. Ova činjenica se u poslednje vrijeme koristi za tzv. bezsenzorsko određivanje brzine indukcijske mašine, [6].

Činjenica da sve prostorne harmonike mms (gustine magnetskog fluksa) sa strane statora kavezni rotor reflektuje na samo dvije učestanosti (za $\lambda=1$), osnovni je limitirajući faktor detekcije kvarova kod indukcijske mašine kao što su međuzavojni kratak spoj ili statički ekscentricitet rotora, putem analize spektra struje statora, [7], [8].

LITERATURA

- [1] T.A.Lipo, *Analysis and control of synchronous machines*. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Wisconsin, Madison, 1986.
- [2] M.G.Say, *Alternating current machines*. Fifth edition. Pitman 1984.
- [3] G.Joksimović, M.Đurović, A.Obradović, "Skew and linear rise of MMF across slot modeling – winding function approach", *IEEE Trans. on Energy Conversion*, 14(3), pp.315-320, September 1999.
- [4] G.Joksimović, *Analysis and simulation of faults in squirrel cage induction motors by multiple coupled circuit model*, Ph.D. Thesis, University of Montenegro, 2000.
- [5] G.Joksimović, M.Đurović, J.Penman: "Cage Rotor MMF – Winding Function Approach", *IEEE Power Engineering Review Letters*, 21(4), pp.64-66, April 2001.
- [6] K.D.Hurst, T.G.Habetler "A comparison of spectrum estimation techniques for sensorless speed detection in induction machines", *IEEE Trans. on Industry Applications*, 33(4), pp.898-905, July/August 1997.
- [7] G.Joksimović, M.Đurović, J.Penman, N.Arthur: "Dynamic Simulation of Dynamic Eccentricity in Induction Machines – Winding Function Approach", *IEEE Trans. on Energy Conversion*, 15(2), pp.143-148, June 2000.
- [8] G.Joksimović, J.Penman: "The Detection of Inter-Turn Short Circuits in the Stator Windings of Operating Motors", *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 47(5), pp.1078-1084, October 2000.