

NOVI ANALITIČKI MODEL ZA ANALIZU PERFORMANSI CQ KOMUTATORA PAKETA U USLOVIMA SPORADIČNOG DOLAZNOG SAOBRAĆAJA

Anita Šimurina*, Milutin Radonjić**, Igor Radusinović***

Ključne riječi: krosbar komutator, srednje kašnjenje, propusnost, IBP saobraćaj

Sažetak: U ovom radu je predložen novi analitički iterativni metod za izračunavanje propusnosti i srednjeg kašnjenja krosbar komutatora sa baferima u ukrsnim tačkama u uslovima sporadičnog dolaznog saobraćaja. U sprovedenoj analizi, izbor ćelija u koliziji baziran je na algoritmu slučajnog izbora. Dolazni saobraćaj je modelovan *IBP (Interrupted Bernoulli Process)* modelom saobraćaja. Verifikacija ovog metoda, izvršena poređenjem sa simulacionim rezultatima, je pokazala veliku bliskost rezultata. Prema saznanjima autora, ovo je prvi analitički metod za analizu performansi ovog komutatora, pri IBP dolaznom saobraćaju.

1. UVOD

Krosbar arhitektura je jedna od najpopularnijih arhitektura za izradu modernih komutatora paketa velikih brzina. Ona je interesantna za implementaciju zbog svoje jednostavnosti i interno-neblokirajuće strukture. Od nedavno, otkako je napredak poluprovodničke tehnologije omogućio implementaciju bafera većih kapaciteta u ukrsne tačke, aktuelizovana je arhitektura krosbar komutatora koji sadrži bafere isključivo u ukrsnim tačkama (*Crosspoint Queued - CQ*) [1]. Odsustvo ulaznih bafera je velika prednost ovakve arhitekture jer postojanje ulaznih bafera zahtijeva kontrolnu signalizaciju između ulaza i komutacionog uređaja čije propagaciono kašnjenje nameće ograničenja u pogledu performansi uređaja.

Performanse *CQ* komutatora su analizirane u [1]-[5]. U [1] su, za slučaj jediničnih bafera i uniformnog dolaznog saobraćaja, izvedeni izrazi u zatvorenoj formi za propusnost i kašnjenje. Složenost ovakvog pristupa čini ga neprimjenljivim na slučajeve većih ukrasnih

* Anita Šimurina, spec.sci

** Dr Milutin Radonjić, Elektrotehnički fakultet Podgorica, Džordža Vašingtona b.b. 81000 Podgorica.

*** Prof. dr Igor Radusinović, Elektrotehnički fakultet Podgorica, Džordža Vašingtona b.b. 81000 Podgorica.

bafera. U [2] je predstavljen model za analizu performansi krosbar komutatora sa jediničnim baferima u ukrsnim tačkama za uniformni tip dolaznog saobraćaja. Model za analizu performansi CQ komutatora sa ukrsnim baferima većim od jediničnih, za uniformni tip dolaznog saobraćaja, baziran na iterativnom algoritmu, predstavljen je u [3]. Performanse CQ komutatora za različite tipove dolaznog saobraćaja su, na osnovu rezultata dobijenih simulacijama, analizirane u [4]-[5].

Imajući u vidu da je struktura CQ komutatora izuzetno atraktivna za realizaciju i vodeći računa o činjenici da sporadičan tip dolaznog saobraćaja kvalitetnije modeluje slučaj realnog Internet saobraćaja u odnosu na uniformni model, napravljen je model za analizu performansi CQ komutatora za sporadični tip dolaznog saobraćaja. Analiziran je komutator sa slučajnim algoritmom raspoređivanja na čije ulaze se dovodi saobraćaj modelovan IBP (*Interrupted Bernoulli Process*) modelom. Analitički model je baziran na trodimenzionalnom Markovljevom lancu koji se rješava iterativnim metodom sa ciljem dobijanja raspodjele stanja, odnosno izračunavanja performansi.

Zbog velike složenosti razvijenog modela, model je za najjednostavniji slučaj CQ komutatora (2×2 komutator sa jediničnim baferima u ukrsnim tačkama) predstavljen u [6], a u ovom radu je predstavljen opšti model, odnosno, model razvijen za proizvoljan broj ulaza/izlaza komutatora i ukrsne bafere proizvoljne veličine. Predloženi model je modifikacija modela za analizu performansi $CICQ$ (*Combined Input and Crosspoint Queued*) komutatora predstavljenog u [7].

Struktura rada je sledeća. U drugom poglavlju rada je opisana struktura CQ komutatora. Treće poglavlje je posvećeno modelu saobraćaja. Originalni model za analizu performansi CQ komutatora je predstavljen u četvrtom poglavlju, nakon čega je, u petom poglavlju, dato poređenje rezultata dobijenih novim analitičkim modelom sa rezultatima dobijenim simulacijama.

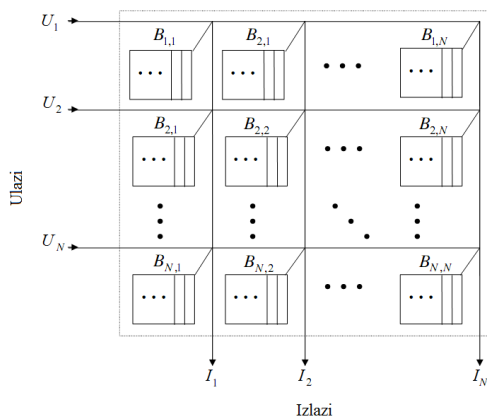
2. ARHITEKTURA CQ KOMUTATORA

Struktura CQ komutatora je prikazana na slici 1. CQ komutator je krosbar komutator koji sadrži bafere isključivo u ukrsnim tačkama. Komutator ima N ulaza i N izlaza, a u svakoj od N^2 ukrasnih tačaka se nalazi bafer veličine s paketa. Sa B_{ij} je označen bafer u ukrskoj tački i -tog ulaza i j -tog izlaza. Iako je u prošlosti realizacija N^2 ukrasnih bafera predstavljala problem, danas je CQ komutacioni uređaj moguće implementirati u jednom čipu. Sada je veći ograničavajući faktor broj pinova koje je fizički moguće smjestiti na čipu nego potrebna površina poluprovodničkog materijala [1]. Očekuje se da će mogućnosti po pitanju veličine ukrasnih bafera biti sve veće s porastom gustine SRAM-a (*Static RAM*), skoro dvostruko svakih 2.5 godine [1].

Radi jednostavnosti analize, a saglasno uobičajenoj metodologiji, razmatraju se dolazni paketi fiksne dužine koji se nazivaju ćelijama. Pretpostavka da su ćelije koje dolaze na ulaz jednake dužine je realna, jer se u praksi segmentacija i ulančavanje paketa varijabilne dužine obavljaju van komutacionog uređaja, na linijskim karticama. Svaka od ćelija koje pristižu na ulaze komutacionog uređaja se direktno smješta u odgovarajući ukrsni bafer ukoliko on nije pun, a u suprotnom se odbacuje. Na svakoj od izlaznih linija, raspoređivač bira po jedan od ukrasnih bafera koji nisu prazni i njegovu HOL (*Head Of Line*) ćeliju

prosleđuje na izlaz. U ovom radu se modeluje komutator koji za rješavanje problema izlazne kolizije koristi algoritam raspoređivanja baziran na slučajnom izboru.

Važno je primijetiti da izlazi funkcionišu nezavisno jedan od drugog. Kako funkcionisanje jednog izlaza ne utiče na funkcionisanje drugog, analiza performansi uređaja se vrši odvojeno za pojedine izlaze, odnosno, vrši se za jedan posmatrani izlaz.



Slika 1. Struktura CQ komutatora paketa

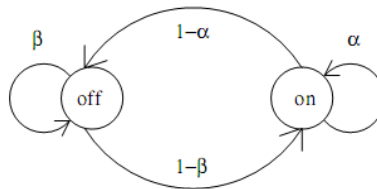
3. MODEL SAOBRAĆAJA

U analizi performansi komutatora paketa uobičajena pretpostavka je da je vrijeme podijeljeno na jednake vremenske slotove koji predstavljaju vrijeme potrebno za prenos ćelije kroz komutator. Svaki vremenski slot je konceptualno i funkcionalno podijeljen u dvije faze:

1. faza odlaska, kada paketi napuštaju komutator i
2. faza dolaska, kada paketi pristižu i smještaju se u odgovarajuće ukrasne bafere.

Dakle, u ovoj analizi je uzeto da faza odlaska prethodi fazi dolaska, što ne utiče na opštost rezultata, jer je poznato da redosled ovih faza ne utiče na performanse komutatora.

Izvor saobraćaja na svakom ulazu komutatora je modelovan *Interrupted Bernoulli Process (IBP)* modelom saobraćaja. *IBP* dolazni saobraćaj je saobraćaj koji se sastoji iz aktivnog (*ON*) stanja i neaktivnog (*OFF*) stanja čija trajanja imaju geometrijsku raspodjelu. Ćelije koje pripadaju istoj grupi (*burst*) su adresirane na isti izlaz čime se modeluje fragmentacija paketa varijabilne dužine. U osnovi, tokom svakog vremenskog slota izvor saobraćaja se može opisati Bernulijevim dolaznim procesom koji će ostati u stanju *ON* sa vjerovatnoćom α , dok će preći u stanje *OFF* sa vjerovatnoćom $1-\alpha$, kao što je prikazano na slici 2.



Slika 2. IBP model saobraćaja

Parametri α i β , kojima se opisuju vjerovatnoće tranzicija stanja izvora saobraćaja, dati su jednačinama (1) i (2):

$$\alpha = 1 - \frac{1}{b_s} \quad (1)$$

$$\beta = \frac{1-p}{1-p\alpha} \quad (2)$$

gdje je p intenzitet dolaznog opterećenja a b_s srednje trajanje *burst*-a.

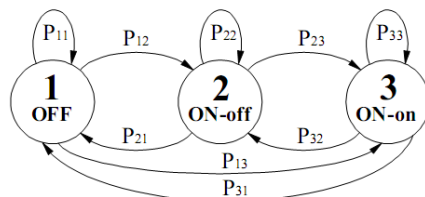
Opisani IBP model saobraćaja se koristi za modelovanje saobraćaja na ulazu komutatora. Treba primijetiti da pristižuće grupe ćelija mogu biti adresirane na bilo koji od izlaza, odnosno, model sa dva stanja ne omogućava izolaciju saobraćaja između određenog ulaza i izlaza. Već je rečeno da se, s obzirom na nezavisno funkcionisanje pojedinih izlaza komutatora, analiza sprovodi na nivou proizvoljnog izlaza, pa je opisani model saobraćaja potrebno modifikovati kako bi se od ukupnog saobraćaja koji pristiže na jedan ulaz izdvojio dio saobraćaja koji je adresiran na jedan (posmatrani) izlaz.

Modifikacija opisanog modela saobraćaja je izvršena dodavanjem još jednog stanja. Modifikovani model saobraćaja ima tri stanja, odnosno, sada se izvor saobraćaja na pojedinom ulazu može naći u jednom od tri moguća stanja:

1. *OFF*: Na posmatranom ulazu komutatora ne pristiže ćelija,
2. *ON-off*: Na posmatranom ulazu komutatora pristiže ćelija koja nije adresirana na posmatrani izlaz,
3. *ON-on*: Na posmatranom ulazu komutatora pristiže ćelija koja je adresirana na posmatrani izlaz.

Ovakvom modifikacijom je omogućeno izdvajanje dijela saobraćaja namijenjenog određenom izlazu od ukupnog saobraćaja koji pristiže na jedan ulaz komutatora. Ovo je važno jer na ulaz bafera u ukrasnoj tački $B_{i,j}$ dolazi saobraćaj koji pristiže na ulaz i a adresiran je na izlaz j . Stoga, jasno je da je izdvajanje toka saobraćaja na ovaj način bilo neophodno.

Dijagram stanja izvora saobraćaja prikazan je na slici 3.



Slika 3. Dijagram stanja izvora saobraćaja

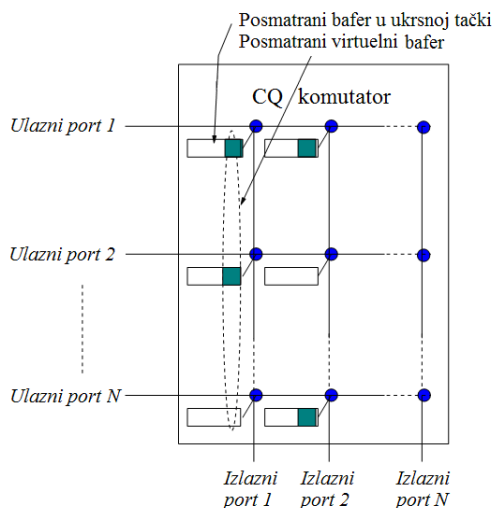
Ako vjerovatnoća da je ćelija koja pristiže na posmatrani ulaz adresirana na posmatrani izlaz iznosi $\gamma = \frac{1}{N}$, dobija se da su vjerovatnoće tranzicija stanja izvora saobraćaja na posmatranom ulazu date jednačinom (3):

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & (1-\gamma) \cdot (1-\beta) & \gamma \cdot (1-\beta) \\ (1-\alpha) \cdot \beta & \alpha + (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot (1-\gamma) & (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot \gamma \\ (1-\alpha) \cdot \beta & (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot (1-\gamma) & \alpha + (1-\alpha) \cdot (1-\beta) \cdot \gamma \end{bmatrix} \quad (3)$$

4. MODEL STANJA BAFERA

Modelovanje sistema zasnovano je na modelu virtuelnog bafera koji se, sa ciljem pojednostavljenja modela, svodi na modelovanje samo jednog, proizvoljno odabranog ukrsnog bafera. Da bi ovakav pristup bio moguć, uvodi se pretpostavka o identičnoj raspodjeli stanja svih ukrasnih bafera, odnosno, uzima se da je raspodjela stanja koja se dobija za uočeni XB primjenljiva i na ostale, njemu konkurentne ukrsne baferne.

S obzirom da vjerovatnoća odlaska ćelije ukrasnog bafera zavisi od popunjenosti njemu konkurentnih bafera, tj. broja konkurentnih bafera koji sadrže ćelije za slanje, kako bi se modelovala zavisnost vjerovatnoće odlaska ćelije uočenog XB od popunjenosti konkurentnih bafera, uz uočeni XB se modeluje još jedan bafer, tzv. virtuelni bafer. Uočeni XB i odgovarajući virtuelni bafer su, radi boljeg razumijevanja njihove uloge i pozicije, označeni na strukturi analiziranog komutatora prikazanoj na slici 4.



Slika 4. Uloga i pozicija posmatranog ukrsnog i virtuelnog bafera

Dakle, modelovanje sistema se svodi na modelovanje posmatranog ukrsnog i odgovarajućeg virtuelnog reda čekanja, pri čemu priroda *IBP* saobraćaja zahtijeva da se uzme u obzir i stanje izvora saobraćaja na posmatranom ulazu. Stoga, sistem se modeluje trodimenzionalnim Markovljevim lancem, odnosno, svako stanje Markovljevog lanca je potrebno opisati sa sledeće tri veličine:

1. L – broj ćelija u posmatranom ukrsnom baferu
2. G – stanje izvora saobraćaja na posmatranom ulazu
3. W – broj ćelija u posmatranom virtuelnom baferu

Neka $\pi_{l,g,w}$ predstavlja vjerovatnoću da se, na kraju vremenskog slotu, sistem nađe u stanju (l,g,w) koje karakteriše broj ćelija u posmatranom baferu $L=l$, stanje izvora saobraćaja na posmatranom ulazu $G=g$ i broj ćelija u posmatranom virtuelnom baferu $W=w$, za $l \in [0, s]$, $g \in [1, 2, 3]$, $w \in [0, \dots, N]$. Vektor raspodjele stanja u stacionarnom stanju je:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{0,1,0}, \pi_{0,1,1}, \dots, \pi_{0,1,N-1}, \pi_{0,2,0}, \dots, \pi_{0,2,N-1}, \dots, \pi_{0,3,N-1}, \pi_{1,1,1}, \\ \dots, \pi_{1,1,N}, \pi_{1,2,1}, \dots, \pi_{1,2,N}, \dots, \pi_{1,3,N}, \pi_{2,1,1}, \dots, \pi_{s,3,N} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Broj mogućih stanja Markovljevog lanca iznosi $3 \cdot N \cdot (s+1)$. Za definisanu tranzicionu matricu, vektor raspodjele stanja se dobija iterativnim postupkom. U daljem tekstu slijedi definicija tranzicione matrice.

Ako je i popunjenost posmatranog ukrsnog bafera na kraju prethodnog slotu a j popunjenost istog na kraju tekućeg slotu, tranziciona matrica čiji element i -te vrste i j -te kolone predstavlja vjerovatnoću prelaza iz stanja $L=i$ u stanje $L=j$ je data kao:

$$T = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{-1} & A_0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{-1} & A_0 & A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_{-1} & A_0 & A_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{-1} & C_0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

S obzirom da u toku jednog vremenskog slota najviše jedna ćelija može napustiti i najviše jedna pristići u ukrasni bafer, popunjenost ukrasnog bafera se, za vrijeme jednog vremenskog slota, može promijeniti za najviše jednu ćeliju. Stoga su u T matrici različiti od nule samo elementi koji se odnose na tranzicije u stanje za jedan nižeg, za jedan višeg, ili istog reda, dok su ostali elementi jednaki nuli. S obzirom da tranzicije u stanje nižeg, istog ili višeg reda odgovaraju različitim događajima, ni odgovarajuće vjerovatnoće tranzicije ne mogu biti jednake, pa je razlika između ovih slučajeva napravljena korišćenjem sledećih indeksnih oznaka:

- " -1 " za prelazak u stanje nižeg reda (iz $L=i$ u $L=i-1$),
- " 0 " za prelazak u stanje istog reda (iz $L=i$ u $L=i$),
- " 1 " za prelazak u stanje višeg reda (iz $L=i$ u $L=i+1$).

Ako je bafer na kraju prethodnog slota bio prazan, ne učestvuje u arbitraciji, a ukoliko je bio pun, može nastupiti gubitak. Dakle, slučajevi prethodno praznog i prethodno punog bafera predstavljaju specijalne slučajeve pa se i odgovarajuće vjerovatnoće tranzicija razlikuju u odnosu na opšti slučaj. Da bi se napravila razlika između ovih slučajeva, koriste se sledeće oznake:

A: Odnosi se na opšti slučaj tranzicije, isključujući slučajeve praznog i punog posmatranog XB na kraju prethodnog slota. Posmatrani XB nije bio prazan na kraju prethodnog slota što znači da na početku faze odlaska sadrži ćeliju za prosleđivanje, a pristizuća ćelija ne može biti odbačena uslijed maksimalne popunjenosti bafera jer je u XB bilo slobodnog mjesta na kraju prethodnog slota. Razmatrani slučajevi tranzicije su:

$$L=i \rightarrow L=j, \quad i \in [1, s-1], \quad j \in [i-1, i, i+1].$$

C: Kako u slučaju da u posmatrani XB nema mjesta za prijem novih ćelija može nastupiti gubitak, odgovarajuće vjerovatnoće tranzicija se razlikuju u odnosu na opšti slučaj te se moraju posebno analizirati. Razmatrani slučajevi tranzicije su:

$$L=s \rightarrow L=s-1, \quad L=s \rightarrow L=s.$$

D: Ukoliko posmatrani XB nije sadržao ćeliju na kraju prethodnog slota, ne učestvuje u arbitraciji bez obzira na to da li u tekućem slotu pristize ćelija, jer faza odlaska prethodi fazi dolaska. Zbog ove razlike u odnosu na opšti slučaj, slučajevi tranzicija iz prethodno praznog XB se takođe moraju posebno analizirati. Razmatrani slučajevi tranzicije su:

$$L=0 \rightarrow L=0, \quad L=0 \rightarrow L=1.$$

Kako vjerovatnoća promjene popunjenosti bafera zavisi od vjerovatnoće dolaska i vjerovatnoće odlaska ćelije, a ove od stanja izvora saobraćaja i popunjenosti virtuelnog bafera, respektivno, dalja definicija T matrice zahtijeva da se u obzir uzmu moguća stanja

izvora saobraćaja i popunjenosti virtuelnog bafera. Dakle, svaki od elemenata T matrice (A , C , D) mora uzeti u obzir moguća stanja izvora saobraćaja i moguće popunjenosti virtuelnog bafera, pa je svaki od ovih elemenata i sam matrica. Da bi se nastavilo sa definicijom T matrice, moraju se definisati sledeći parametri i vjerovatnoće.

η – Vjerovatnoća da u neki od konkurentnih XB , koji je na kraju prethodnog slota bio prazan, pristizhe nova ćelija, ako je poznato da je popunjenost virtuelnog bafera na kraju prethodnog slota W_l :

Imajući u vidu pretpostavku o identičnoj raspodjeli stanja svih ukrasnih bafera, zaključuje se da se konkurentni bafer na kraju prethodnog slota našao u nekom od stanja $(0, g, W_l)$, $g \in [1, 2, 3]$, pa se na osnovu formula totalne i uslovne vjerovatnoće dobija da je:

$$\eta_{(W_l)} = \frac{\pi_{0,1,W_l} \cdot P_{13} + \pi_{0,2,W_l} \cdot P_{23} + \pi_{0,3,W_l} \cdot P_{33}}{\pi_{0,1,W_l} + \pi_{0,2,W_l} + \pi_{0,3,W_l}} \quad (6)$$

ψ – Vjerovatnoća da je konkurentni XB , koji na kraju prethodnog slota nije bio prazan, sadržao samo jednu ćeliju i da u tekućem slotu ne pristizhe nova ćelija, ako je poznato da je popunjenost virtuelnog bafera na kraju prethodnog slota bila W_l :

Uzimajući u obzir informaciju o tome da ovaj konkurentni bafer na kraju prethodnog slota nije bio prazan, te da se morao naći u nekom od stanja (l, g, W_l) , $l \in [1, \dots, s]$, $g \in [1, 2, 3]$, na osnovu formula totalne i uslovne vjerovatnoće se dobija da je:

$$\psi_{(W_l)} = \frac{\pi_{1,1,W_l}(1-P_{13}) + \pi_{1,2,W_l}(1-P_{23}) + \pi_{1,3,W_l}(1-P_{33})}{\sum_{i=1}^s \pi_{i,1,W_l} + \pi_{i,2,W_l} + \pi_{i,3,W_l}} \quad (7)$$

Neka $P_{suc}(W_l, W_c)$ i $P_{blo}(W_l, W_c)$ predstavljaju vjerovatnoće da se u tekućem slotu HOL ćelija posmatranog XB prosleđuje na izlaz ili da je blokirana, respektivno, ako je zauzetost virtuelnog bafera na kraju prethodnog slota bila W_l a na kraju tekućeg slota je W_c .

$\underline{P_{suc}(W_l, W_c)}$: Vjerovatnoća da se HOL ćelija posmatranog XB prosleđuje na izlaz je $1/W_l$ jer je W_l ukrasnih bafera koji nisu prazni na početku faze odlaska i čije HOL ćelije učestvuju u arbitraciji. Popunjenost virtuelnog bafera se mijenja saglasno binomnoj raspodjeli: vjerovatnoća da se popunjenost posmatranog virtuelnog bafera promijeni sa W_l na W_c odgovara vjerovatnoći da u $W_c - W_l$ od $N - W_l$ praznih konkurentnih bafera pristigne nova ćelija, pri čemu parametar η predstavlja vjerovatnoću pristizanja nove ćelije u prethodno prazan konkurentni XB . $P_{suc}(W_l, W_c)$ je data sa:

$$P_{suc}(W_l, W_c) = \frac{1}{W_l} \binom{N - W_l}{W_c - W_l} \eta_{(W_l)}^{W_c - W_l} (1 - \eta_{(W_l)})^{N - W_c}, \quad 0 < W_l \leq W_c \leq N \quad (8)$$

$P_{blo}(W_l, W_c)$: Ako vjerovatnoća uspješnog prosleđivanja *HOL* ćelije posmatranog *XB* iznosi $1/W_l$, onda vjerovatnoća blokiranja iste iznosi $1-1/W_l$. Kao što je već rečeno, vjerovatnoća promjene popunjenosti virtuelnog bafera prati binomnu raspodjelu, ali je ovdje situacija nešto drugačija nego u slučaju kad se *HOL* ćelija posmatranog *XB* prosleđuje na izlaz. Kad je ćelija posmatranog *XB* blokirana, na izlaz se prosleđuje ćelija nekog od konkurentnih bafera, pri čemu je moguće da odabrani konkurentni bafer sadrži samo jednu ćeliju. U tom slučaju, ukoliko u taj konkurentni bafer ne pristigne nova ćelija tokom faze dolaska ($\Psi_{(W_l)}$), on će na kraju tekućeg slota biti prazan. Kao rezultat, od W_l ukrasnih bafera koji na kraju prethodnog slota nisu bili prazni, W_l-1 sadrži ćelije i na kraju tekućeg slota. Stoga, da bi popunjenost virtuelnog bafera na kraju tekućeg slota bila W_c , od $N-W_l$ prethodno praznih bafera nove ćelije moraju pristići u njih W_c-W_l+1 umjesto u W_c-W_l . Uzimajući u obzir rečeno, vjerovatnoća blokiranja *HOL* ćelije posmatranog bafera je data jednačinom (9):

$$P_{blo}(W_l, W_c) = \begin{cases} \frac{W_l-1}{W_l} \left(\binom{N-W_l}{W_c-W_l} \eta_{(W_l)}^{W_c-W_l} (1-\eta_{(W_l)})^{N-W_c} (1-\Psi_{(W_l)}) + \right. \\ \left. + \binom{N-W_l}{W_c-W_l+1} \eta_{(W_l)}^{W_c-W_l+1} (1-\eta_{(W_l)})^{N-W_c-1} \Psi_{(W_l)} \right), & 1 < W_l \leq W_c < N \\ \frac{W_l-1}{W_l} \binom{N-W_l}{W_c-W_l} \eta_{(W_l)}^{W_c-W_l} (1-\eta_{(W_l)})^{N-W_c} (1-\Psi_{(W_l)}), & 1 < W_l \leq W_c = N \\ \frac{W_l-1}{W_l} (1-\eta_{(W_l)})^{N-W_l} \Psi_{(W_l)}, & W_c = W_l - 1 \end{cases} \quad (9)$$

Neka su *S* (*successfully*) i *B* (*blocking*) matrice koje, uzimajući u obzir moguće promjene popunjenosti virtuelnog bafera, sadrže vjerovatnoće uspješnog prosleđivanja odnosno blokiranja *HOL* ćelije posmatranog *XB*:

$$S = \begin{bmatrix} P_{suc}(1,1) & P_{suc}(1,2) & \cdots & P_{suc}(1,N-1) & P_{suc}(1,N) \\ 0 & P_{suc}(2,2) & \cdots & P_{suc}(2,N-1) & P_{suc}(2,N) \\ 0 & 0 & \cdots & P_{suc}(3,N-1) & P_{suc}(3,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P_{suc}(N,N) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_{blo}(2,1) & P_{blo}(2,2) & \dots & P_{blo}(2,N-1) & P_{blo}(2,N) \\ 0 & P_{blo}(3,2) & \dots & P_{blo}(3,N-1) & P_{blo}(3,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{blo}(N,N-1) & P_{blo}(N,N) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Sada se A matrice, koje se odnose na opšti slučaj tranzicije popunjenosti posmatranog XB isključujući slučajeve prethodno praznog i punog XB , definišu na sledeći način:

A_{-1} : U stanje nižeg reda se može preći samo ako u tekućem slotu ne pristiže nova ćelija u posmatrani XB pri čemu se njegova HOL ćelija prosleđuje na izlaz. Stoga, elementi ove matrice koji se odnose na tranzicije stanja izvora saobraćaja u stanje $G=1$ odnosno $G=2$ (slučaj nepristizanja nove ćelije) jednaki su proizvodu odgovarajuće vjerovatnoće tranzicije stanja izvora saobraćaja i S matrice koja, uzimajući u obzir moguće tranzicije popunjenosti virtuelnog bafera, zastupa vjerovatnoće uspješnog prosleđivanja HOL ćelije posmatranog XB na izlaz. Kako se u slučaju pristizanja nove ćelije ne može preći u stanje nižeg reda, elementi matrice koji se odnose na tranzicije izvora saobraćaja u stanje $G=3$ su jednaki nuli. Sa N je označena $N \times N$ matrica čiji su elementi isključivo nule.

A_0 : U stanje istog reda se može preći u dva slučaja: ukoliko u posmatrani XB pristiže nova ćelija pri čemu se njegova HOL ćelija prosleđuje na izlaz, ili u slučaju da u posmatrani XB ne pristiže nova ćelija a njegova HOL ćelija je blokirana. Elementi ove matrice koji se odnose na slučajeve nepristizanja nove ćelije u tekućem slotu (tranzicije u $G=1$ odnosno $G=2$) se sastoje od odgovarajućih vjerovatnoća tranzicija stanja izvora saobraćaja i B matrice, a elementi koji se odnose na slučajeve pristizanja nove ćelije (tranzicije u $G=3$) od odgovarajućih vjerovatnoća tranzicije stanja izvora saobraćaja i S matrice. Ovdje B matrica zastupa vjerovatnoće blokiranja HOL ćelije posmatranog XB uzimajući u obzir moguće tranzicije popunjenosti virtuelnog bafera, dok se S matrica odnosi na slučaj uspješnog prosleđivanja HOL ćelije posmatranog bafera.

A_1 : U stanje višeg reda se može preći samo ukoliko u tekućem slotu pristiže nova ćelija u posmatrani XB pod uslovom da je njegova HOL ćelija blokirana. Stoga su, kod ove matrice, jedino elementi koji se odnose na tranzicije izvora saobraćaja u stanje $G=3$ različiti od nule, a sastoje se od odgovarajućih vjerovatnoća tranzicija stanja izvora saobraćaja i B matrice kao reprezentata vjerovatnoće blokiranja HOL ćelije posmatranog XB za moguće tranzicije popunjenosti virtuelnog bafera.

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} * S & P_{12} * S & N \\ P_{21} * S & P_{22} * S & N \\ P_{31} * S & P_{32} * S & N \end{bmatrix} A_0 = \begin{bmatrix} P_{11} * B & P_{12} * B & P_{13} * S \\ P_{21} * B & P_{22} * B & P_{23} * S \\ P_{31} * B & P_{32} * B & P_{33} * S \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} N & N & P_{13} * B \\ N & N & P_{23} * B \\ N & N & P_{33} * B \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ukoliko u posmatranom XB nije bilo slobodnog mjesta na kraju prethodnog slotu, u slučaju pristizanja nove ćelije može nastupiti gubitak. Stoga, ovaj slučaj se razlikuje od opšteg slučaja i posebno razmatra u okviru C matrica.

C_{-1} : Kako je već konstatovano pri definiciji A_{-1} matrice, u stanje nižeg reda se može preći samo ako u tekućem slotu ne pristiže nova ćelija a *HOL* ćelija posmatranog *XB* se prosleđuje na izlaz. Kako tranzicija u stanje nižeg reda isključuje slučaj pristizanja nove ćelije, ne može nastupiti gubitak, te je C_{-1} identična A_{-1} matrici.

C_0 : Ni ovdje nema razlike u odnosu na opšti slučaj kada su u pitanju elementi koji se odnose na slučajeve nepristizanja ćelije, stoga su oni identični odgovarajućim elementima A_0 matrice. U slučaju pristizanja nove ćelije, situacija je nešto drugačija. Ukoliko se *HOL* ćelija posmatranog *XB* prosleđuje na izlaz tokom tekućeg slota, pristižuća ćelija će biti smještena u *XB* te će *XB* na kraju tekućeg slota opet biti u istom stanju – stanju maksimalne popunjenosti bafera. Ukoliko je *HOL* ćelija posmatranog *XB* blokirana, pristižuća ćelija će biti odbačena uslijed nedovoljnog prostora u baferu, a *XB* će na kraju tekućeg slota takođe biti u stanju maksimalne popunjenosti. Dakle, u slučaju pristizanja nove ćelije, *XB* ostaje u stanju maksimalne popunjenosti bez obzira na to da li se njegova *HOL* ćelija prosleđuje na izlaz ili je blokirana. Stoga, vjerovatnoća tranzicije u stanje istog reda se, u slučaju pristizanja nove ćelije u prethodno pun *XB*, sastoji od proizvoda odgovarajuće vjerovatnoće tranzicije stanja izvora saobraćaja i sume matrica *B* i *S*.

$$C_0 = \begin{bmatrix} P_{11} * B & P_{12} * B & P_{13} * (B+S) \\ P_{21} * B & P_{22} * B & P_{23} * (B+S) \\ P_{31} * B & P_{32} * B & P_{33} * (B+S) \end{bmatrix} \quad C_{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} * S & P_{12} * S & N \\ P_{21} * S & P_{22} * S & N \\ P_{31} * S & P_{32} * S & N \end{bmatrix} \quad (13)$$

Kako faza odlaska prethodi fazi dolaska, posmatrani *XB* ne može učestvovati u arbitraciji ukoliko je bio prazan na kraju prethodnog slota. Stoga, kako u slučaju prethodno praznog posmatranog *XB* nema smisla govoriti o vjerovatnoći prosleđivanja/blokiranja njegove *HOL* ćelije, u definiciji *D* matrica koje se odnose na prethodno prazan *XB*, matrice *S* i *B* nisu primjenljive. Ipak, moguće tranzicije popunjenosti virtuelnog bafera se moraju uzeti u obzir pa se za potrebe definicije *D* matrica uvodi *E* (*empty*) matrica. *E* matrica, kao i *S* i *B* matrice, uzima u obzir moguće tranzicije popunjenosti virtuelnog bafera, s tom razlikom što ne uzima u obzir vjerovatnoću prosleđivanja odnosno blokiranja *HOL* ćelije posmatranog bafera jer on ne sadrži ćeliju za slanje i shodno tome, ne učestvuje u arbitraciji.

Dakle, elementi *E* matrice predstavljaju vjerovatnoće promjene popunjenosti virtuelnog bafera u slučaju prethodno praznog posmatranog *XB*. Ove vjerovatnoće opisane su binomnom raspodjelom, pri čemu, kao i u slučaju definicije vjerovatnoće blokiranja $P_{bto}(W_l, W_c)$, treba uzeti u obzir mogućnost da je konkurentni bafer, čija se *HOL* ćelija prosleđuje na izlaz, prazan na kraju tekućeg slota. Elementi *E* matrice su definisani sa (14), pa se *E* matrica formira kao (15). Ista *E* matrica je primjenjiva bez obzira na to da li u posmatrani *XB* pristiže ćelija u tekućem slotu mada oznake koje su korišćene u (14) i (15) odgovaraju slučaju nepristizanja ćelije u posmatrani *XB*.

$$E(W_l, W_c) = \begin{cases} \binom{N-1}{W_c} \eta_{(W_l)}^{W_c} (1-\eta_{(W_l)})^{N-1-W_c}, & W_l = 0 \\ \binom{N-1-W_l}{W_c - W_l} \eta_{(W_l)}^{W_c - W_l} (1-\eta_{(W_l)})^{N-1-W_c} (1-\psi_{(W_l)}) & \\ \binom{N-1-W_l}{W_c - W_l + 1} \eta_{(W_l)}^{W_c - W_l + 1} (1-\eta_{(W_l)})^{N-1-W_c-1} \psi_{(W_l)}, & 0 < W_l \leq W_c < N-1 \\ \eta_{(W_l)}^{N-1-W_l} (1-\psi_{(W_l)}), & 0 < W_l, W_c = N-1 \\ (1-\eta_{(W_l)})^{N-1-W_l} \psi_{(W_l)}, & W_c = W_l - 1 \end{cases} \quad (14)$$

$$E = \begin{bmatrix} E(0,0) & E(0,1) & \cdots & E(0,N-2) & E(0,N-1) \\ E(1,0) & E(1,1) & \cdots & E(1,N-2) & E(1,N-1) \\ 0 & E(2,1) & \cdots & E(2,N-2) & E(2,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E(N-1,N-2) & E(N-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Konačno mogu biti definisane i D matrice, čime je završena definicija tranzicione matrice:

D_0 : Ukoliko je posmatrani XB na kraju prethodnog slota bio prazan, ostaće u istom stanju samo ukoliko u tekućem slotu ne pristiže nova ćelija. Kako faza odlaska prethodi fazi dolaska, pristižuća ćelija ne može biti proslijeđena, tako da u slučaju pristizanja nove ćelije bafer ne može biti prazan na kraju tekućeg slota. Stoga su elementi koji se odnose na slučaj pristizanja nove ćelije (tranzicije u $G=3$) jednaki nuli. Elementi matrice koji se odnose na slučaj nepristizanja nove ćelije ($G=1$ odnosno $G=2$) jednaki su proizvodu odgovarajućih vjerovatnoća tranzicije stanja izvora saobraćaja i E matrice kojom se uzimaju u obzir vjerovatnoće mogućih tranzicija popunjenosti virtuelnog bafera.

D_1 : Kao i u opštem slučaju, tranzicija u stanje višeg reda nastupa isključivo ako u tekućem slotu pristiže nova ćelija. Za razliku od opšteg slučaja, ovdje ne postoji uslov da HOL ćelija posmatranog XB bude blokirana, jer je posmatrani XB bio prazan na kraju prethodnog slota pa tokom faze odlaska ne sadrži ćeliju za slanje. Dakle, elementi matrice koji se odnose na slučaj pristizanja nove ćelije (tranzicije u $G=3$) jesu proizvod odgovarajuće vjerovatnoće tranzicije stanja izvora saobraćaja i E matrice koja zastupa vjerovatnoće mogućih tranzicija popunjenosti virtuelnog bafera, dok su elementi koji se odnose na slučaj nepristizanja nove ćelije u posmatrani XB jednaki nuli.

$$D_0 = \begin{bmatrix} P_{11} * E & P_{12} * E & N \\ P_{21} * E & P_{22} * E & N \\ P_{31} * E & P_{32} * E & N \end{bmatrix} \quad D_1 = \begin{bmatrix} N & N & P_{13} * E \\ N & N & P_{23} * E \\ N & N & P_{33} * E \end{bmatrix} \quad (16)$$

Za definisanu tranzicionu matricu, vektor raspodjele stanja se dobija iterativnim putem. Za dati vektor raspodjele stanja, performanse se računaju na sledeći način:

Propusnost j -tog izlaza se računa kao vjerovatnoća da, na početku faze odlaska, bar jedan od bafera $B_{i,j}$, $i \in [1, \dots, N]$ sadrži ćeliju za prosleđivanje. Imajući u vidu da je u analizi uzeto da faza odlaska prethodi fazi dolaska, ovo odgovara vjerovatnoći da je na kraju prethodnog slota bar jedan od ovih bafera sadržao ćeliju za prosleđivanje, odnosno, da na kraju prethodnog slota nisu svi $B_{i,j}$, $i \in [1, \dots, N]$ baferi bili prazni, pa se propusnost dobija kao:

$$Th = 1 - (\pi_{0,1,0} + \pi_{0,2,0} + \pi_{0,3,0}) = 1 - (\pi_{0,1,0} + \pi_{0,2,0}) \quad (17)$$

Srednja popunjenost bafera XB je data sa:

$$Q_{sr} = \sum_{l=1}^s l \cdot \pi_l = \sum_{l=1}^s l \cdot \sum_{g,w} \pi_{l,g,w}, \quad g \in [1, 2, 3], w \in [1, \dots, N] \quad (18)$$

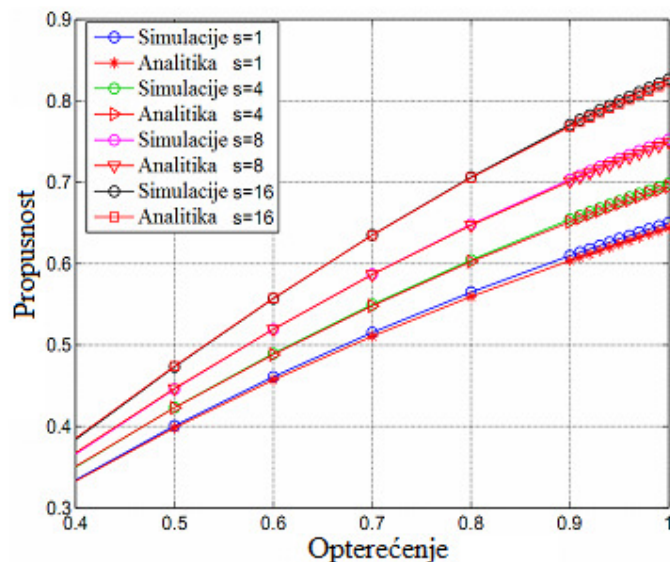
pa je na osnovu Litlove teoreme srednje kašnjenje:

$$D_{sr} = \frac{Q_{sr}}{Th_{ukrsnog_bafera}} = \frac{Q_{sr}}{\frac{Th}{N}} = N \cdot \frac{Q_{sr}}{Th} \quad (19)$$

5. REZULTATI

Sa ciljem dokazivanja tačnosti analize, rezultati dobijeni predstavljenim analitičkim modelom su upoređeni sa rezultatima simulacija, za različite veličine komutatora i bafera u ukrsnim tačkama kao i različite parametre dolaznog saobraćaja.

Dijagramom na slici 5 je prikazana propusnost 16×16 komutatora u funkciji ulaznog opterećenja, za srednju veličinu grupe ćelija $bs=16$ i veličine ukrasnih bafera $s \in [1, 4, 8, 16]$. Može se primijetiti bliskost analitičkih i simulacionih rezultata.



Slika 5. Propusnost 16×16 CQ komutatora u funkciji dolaznog opterećenja za $bs=16$

Radi potpunije analize tabelarno su data procentualna odstupanja analitičkih i simulacionih rezultata pri različitim uslovima dolaznog saobraćaja i za različite veličine ukrasnih bafera, komutatora veličine 8×8 (tabela I) i 32×32 (tabela II). Uočava se da su odstupanja u najvećem broju slučajeva daleko manja od 1%, a uzimajući u obzir napravljene aproksimacije, ova odstupanja su sasvim prihvatljiva.

Tabela I. Propusnost 8×8 : procentualna odstupanja analitičkih i simulacionih rezultata

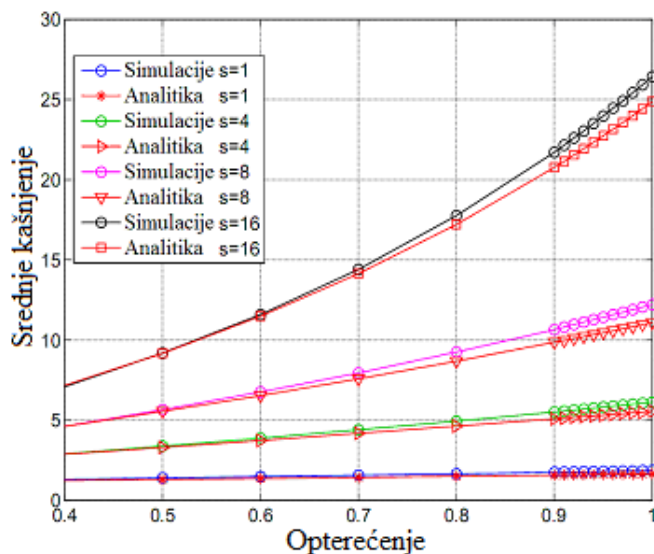
Odstupanje [%]												
p	$bs=1$				$bs=16$				$bs=64$			
	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$
0.1	0.01	0.01	0.01	0.01	1.12	1.42	1.55	1.53	2.14	2.3	2.33	2.33
0.3	0.03	0.03	0.03	0.03	0.27	0.29	0.6	0.66	0.78	0.87	0.93	1.07
0.6	0	0.01	0	0	0.91	0.29	0.05	0.22	0.15	0.17	0.14	0.05
0.9	0	0.01	0	0	0.01	0	0	0	0	0	0	0
0.93	0	0.01	0	0	0.01	0	0	0	0	0	0	0
0.96	0	0.01	0.01	0	0.01	0.01	0	0	0	0	0	0
0.99	0	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01	0	0	0	0	0	0

Tabela II. Propusnost 32×32 : procentualna odstupanja analitičkih i simulacionih rezultata

Odstupanje [%]												
p	$bs=1$				$bs=16$				$bs=64$			
	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$
0.1	0.03	0.03	0.03	0.03	1.12	1.32	1.42	1.44	1.64	1.79	1.78	1.81
0.3	0.06	0.07	0.07	0.07	0.01	0.41	0.6	0.6	0.78	0.87	0.91	1
0.6	0.02	0.03	0.03	0.03	0.72	0.14	0.07	0.03	0.02	0.09	0.18	0.3
0.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.93	0	0	0	0	0.01	0	0	0	0	0	0	0
0.96	0	0	0	0	0.01	0	0	0	0	0	0	0
0.99	0	0.01	0.01	0.01	0.01	0	0	0	0	0	0	0

Dijagramom na slici 6 je prikazano srednje kašnjenje u funkciji dolaznog opterećenja 16×16 komutatora, za $bs=16$ i $s \in [1, 4, 8, 16]$. Primjećuje se da je odstupanje analitičkih i simulacionih rezultata nešto veće nego što je to slučaj sa rezultatima dobijenim za propusnost.

Kao i za propusnost, u tabelama III i IV su data procentualna odstupanja analitičkih i simulacionih rezultata dobijenih za srednje kašnjenje, za različite parametre dolaznog saobraćaja i veličine bafera u ukršnim tačkama, za slučajeve 8×8 (tabela III) i 32×32 (tabela IV) komutatora. Odstupanja analitičkih i simulacionih rezultata, za komutator sa određenim brojem ulaza izlaza, variraju od vrijednosti manjih od 0,01% do preko 10%, a u rezultatima za određeni komutator se ne može uočiti pravilnost u pojavi odstupanja. Ipak, može se primijetiti da su odstupanja rezultata utoliko manja ukoliko je broj ulaza/izlaza komutatora veći. Odstupanja analitičkih i simulacionih rezultata posledica su napravljenih aproksimacija i ograničenosti trajanja simulacija.

Slika 6. Srednje kašnjenje 16×16 CQ komutatora u funkciji dolaznog opterećenja za $bs=16$ Tabela III. Sr. kašnjenje 8×8 : procentualna odstupanja analitičkih i simulacionih rezultata

p	Odstupanje [%]											
	$bs=1$				$bs=16$				$bs=64$			
	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$
0.1	0.01	0	0	0.07	2.67	3.26	5.74	4.79	3.03	3.94	7.85	14.4
0.3	0	0	0	0.02	6.44	1.68	3.23	3.51	7.33	1.61	3.92	7.08
0.6	0.01	0.23	0.26	0.22	9.47	2.65	1.43	1.08	10.8	3.51	2.06	1.12
0.9	0.01	2	7.12	11.7	12.3	7.16	5.69	2.11	14.4	7.38	7.09	6.58
0.93	0	5.46	5.93	16.6	12.6	7.8	6.18	2.49	14.4	8.32	7.73	7.34
0.96	0.02	11.1	1.77	17.8	13.1	8.26	6.67	2.85	15.0	9.15	8.65	8.03
0.98	0	1.06	2.25	2.25	0.25	0.53	0.82	1.1	0.3	0.61	1.04	2.03

Tabela IV. Sr. kašnjenje 32×32 : procentualna odstupanja analitičkih i simulacionih rezultata

p	Odstupanje [%]											
	$bs=1$				$bs=16$				$bs=64$			
	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$	$s=1$	$s=4$	$s=8$	$s=16$
0.1	0.01	0.06	0.19	0.59	2.06	2.63	2.12	0.56	2.51	4.62	7.58	11.8
0.3	0	0.06	0.15	0.26	3.79	0.01	0.64	1.15	4.69	0.59	1.84	1.83
0.6	0.03	0.04	0.1	0.13	6.34	3.5	3.42	1.76	7.07	3.17	2.89	3.48
0.9	0.04	0.57	2.37	2.67	7.51	6.8	6.78	4.39	9.6	6.41	6.59	7.86
0.93	0.1	0.97	3.89	5.36	8.26	7.35	7.26	5.21	9.63	7.19	7.38	8.83
0.96	0.15	6.72	2.77	10.0	8.65	7.78	7.96	5.66	10.5	7.73	7.88	9.14
0.98	0	1.75	1.76	1.38	0.16	0.47	0.99	1.7	0.19	0.45	0.87	2.08

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu je predstavljen analitički model za analizu performansi krosbar komutatora koji sadrži bafere isključivo u ukrsnim tačkama. Analiza je sprovedena za slučaj sporadičnog dolaznog saobraćaja koji je modelovan *IBP* modelom saobraćaja. Analiziran je komutator sa algoritmom raspoređivanja baziranom na slučajnom izboru. Sistem je modelovan trodimenzionalnim Markovljevim lancem koji se rješava iterativnim putem. Upoređivanjem analitičkih rezultata sa rezultatima simulacija koji su dobijeni za različite parametre dolaznog saobraćaja, različit broj ulaza/izlaza komutatora kao i različite kapacitete ukrasnih bafera, pokazano je prilično dobro poklapanje rezultata uprkos napravljenim aproksimacijama.

LITERATURA

- [1] Y. Kanizo, D. Hay, and I. Keslassy: „The crosspoint-queued switch“, in Proc. INFOCOM '09, pp. 729–737, Rio de Janeiro, Brasil, April 2009.
- [2] J. Čvorović., I. Radusinović, M. Radonjić: „Buffering in Crosspoint-Queued Switch“, in Proc. of 17th Telecommunication Forum TELFOR 2009, pp. 198-201, Belgrade, Serbia, November 2009.
- [3] M. Radonjic, I. Radusinovic, J. Cvorovic, K. Yoshigoe: „Iterative throughput calculation for crosspoint queued switch“, IEICE Transactions on Communications, Vol E93-B, No 12, December 2010, pp. 3635-3638,
- [4] M. Radonjić, I. Radusinović: „Average Latency and Loss Probability Analysis of Crosspoint Queued Crossbar Switches“, in Proc. of 52nd International Symposium ELMAR-2010, pp. 203-206, Zadar, Croatia, Sept. 2010.
- [5] M. Radonjic, I. Radusinovic: „Buffer Length Impact to 32x32 Crosspoint Queued Crossbar Switch Performance“, in Proc. of 15th IEEE symposium on Computers and Communications (ISCC 2010) , pp. 954-959, Riccione, Italy, June 2010.
- [6] A. Šimurina, I. Radusinović, M. Radonjić, Z. Veljović: „Analiza propusnosti 2x2 krosbar komutatora sa jediničnim baferima u ukrsnim tačkama pri sporadičnom dolaznom saobraćaju“, 16th Conference on Information Technologies IT '11, pp.98-101, Žabljak, Montenegro, February 2011.
- [7] G. Nong, N. Situ, M. Hamdi: „Delay Analysis of Combined Input-Crosspoint Queueing Switches“, in Proc of 16th International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN 2007), pp 912-917, Honolulu, USA, September 2007.