

VISOKO KONCENTRISANE DISTRIBUCIJE ZA PROCJENU IZVODA FAZE NESTACIONARNIH SIGNALA

Irena Orović, Andjela Draganić**, Srdjan Stanković****

Ključne riječi: estimacija viših izvoda faze, distribucije višeg reda, distribucije sa kompleksnim argumentom vremena

Sažetak: U radu su opisane distribucije višeg reda za procjenu izvoda faze nestacionarnih signala. Definicije predloženih distribucija zasnovane su na konceptima kompleksne analize i diskretizacije Cauchy-jeve integralne formule. Estimirani su prvi, drugi i treći izvod faze. Definisane su opšte forme distribucija N -tog reda za estimaciju pomenutih izvoda faze, a date su i L -forme ovih distribucija, koje obezbjeđuju poboljšanje rezultata standardnih distribucija ne povećavajući red distribucije, odnosno broj tačaka integracije. Teorijska razmatranja ilustrovana su na primjerima signala sa brzo-promjenljivom faznom funkcijom.

1. UVOD

Tokom protekle dvije decenije vremensko-frekvencijska analiza signala je intenzivno primjenjivana u mnogim aplikacijama koje podrazumijevaju korišćenje izrazito nestacionarnih signala, kao što su biomedicinski signali, radari, sonari, signali u komunikacionim sistemima, multimedijalnim sistemima i slično. U zavisnosti od prirode samih signala i njihove faze, predložene su brojne forme vremensko-frekvencijskih distribucija: linearne (spektrogram), kvadratne (Wigner-ova distribucija, distribucije iz Cohen-ove klase, S-metod) [1], [2], zatim distribucije višeg reda među kojima su najznačajnije polinomijalne i distribucije sa kompleksnim argumentom vremena [3], [4]. Vremensko-frekvencijske distribucije sa kompleksnim vremenskim argumentom su uvedene da bi se obezbijedila efikasna analiza signala sa brzo-promjenljivom trenutnom frekvencijom. Naime, jedna od poželjnih osobina koju bi trebalo da posjeduje vremensko-frekvencijska distribucija je dobra rezolucija, odnosno dobra koncentracija signala u vremensko-frekvencijskom domenu. Međutim, usljed brzih varijacija faze signala, većina

* Doc. dr Irena Orović, Elektrotehnički fakultet Podgorica, Džordža Vašingtona b.b. 81000 Podgorica.

** Spec. sci Andjela Draganić, Elektrotehnički fakultet Podgorica, Džordža Vašingtona b.b. 81000 Podgorica.

*** Prof. dr Srdjan Stanković, Elektrotehnički fakultet Podgorica, Džordža Vašingtona b.b. 81000 Podgorica.

vremensko-frekvencijskih distribucija ne uspijeva da obezbijedi dobru koncentraciju, usljed čega nastaju značajne greške pri procjeni prvog i viših izvoda faze nestacionarnih signala. Stoga će u nastavku biti razmatran pristup koji definiše visoko koncentrisane distribucije i time obezbjeđuje tačnost pri procjeni viših izvoda faze signala. Ovaj pristup je inspirisan konceptima kompleksne analize i teorije kompleksnih funkcija [5]. Analogija sa pomenutim konceptima iskorišćena je za definisanje opštih i specifičnih formi distribucija za procjenu prvog, drugog i trećeg izvoda faze signala.

Rad je strukturiran na sljedeći način. Drugo poglavlje sadrži osnovne koncepte kompleksne analize i definiciju Cauchy-jeve integralne formule. Treće, četvrto i peto poglavlje opisuju estimaciju prvog, drugog i trećeg izvoda, respektivno. Pri estimaciji izvoda faze korišćene su distribucije drugog i četvrtog reda. Definisane su generalne forme distribucija N -tog reda, kao i L -forme tih distribucija. Na kraju poglavlja dati su eksperimentalni rezultati estimacije izvoda faze korišćenjem predloženih pristupa.

2. CAUCHY-JEVA INTEGRALNA FORMULA

Polazeći od osnova kompleksne analize, svaka holomorfnja funkcija $f(z)$, definisana na zatvorenom disku $D = \{z: |z - z_0| \leq r\}$, može biti u potpunosti određena na osnovu svojih vrijednosti na graničnoj kružnici C diska D , prema formuli:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{f(z)}{z - t} dz. \quad (1)$$

Proizvoljni izvod posmatrane funkcije se može dobiti integracijom po kružnici C :

$$f^K(t) = \frac{K!}{2\pi j} \oint \frac{f(z)}{(z - t)^{K+1}} dz. \quad (2)$$

Kako bi uspostavili određenu analogiju između kompleksnih funkcija i signala koje koristimo u realnim aplikacijama, umjesto funkcije $f(z)$ posmatraćemo fazu signala $x(t) = re^{j\varphi(t)}$, kao i izvode faze koji odgovaraju trenutnoj frekvenciji signala, brzini promjene trenutne frekvencije, itd. Ako pretpostavimo da je kružnica centrirana u određenom trenutku t i da je $z = t + \tau e^{j\theta}$, pri čemu je τ poluprečnik kružnice, a $\theta \in [0, 2\pi]$, tada se proizvoljni K -ti izvod faze signala može definisati na sljedeći način:

$$\varphi^{(K)}(t) = \frac{K!}{2\pi\tau^K} \int_0^{2\pi} \varphi(t + \tau e^{j\theta}) e^{-jk\theta} d\theta. \quad (3)$$

U nastavku će biti razmatrani pojedinačni slučajevi procjene prvog, drugog i trećeg izvoda faze.

3. ESTIMACIJA PRVOG IZVODA FAZE

Prvi izvod faze signala predstavlja trenutnu frekvenciju. Na osnovu relacije (3), za vrijednost parametra $K=1$ može se definisati prvi izvod faze signala u obliku [5]:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^{2\pi} \varphi(t + \tau e^{j\theta}) e^{-j\theta} d\theta. \quad (4)$$

Diskretizacijom prethodne relacije u N tačaka dobijamo da je:

$$\varphi'(t)\tau = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi\left(t + \frac{\tau}{N} e^{j2\pi k/N}\right) e^{-j2\pi k/N}. \quad (5)$$

Relacija (5) predstavlja fazu momenta signala sa kompleksnim vremenskim argumentom [5]. Moment signala $M(t, \tau)$ čija faza ima oblik definisan prethodnom relacijom može se zapisati kao:

$$M(t, \tau) = \prod_{k=0}^{N-1} x^{e^{-j2\pi k/N} \left(t + \frac{\tau}{N} e^{j2\pi k/N}\right)}. \quad (6)$$

Primjenom Fourier-ove transformacije na moment signala $M(t, \tau)$ dobija se opšti oblik vremensko-frekvencijske distribucije za procjenu trenutne frekvencije.

3.1 DISTRIBUCIJE DRUGOG REDA ZA PROCJENU PRVOG IZVODA FAZE

Posmatrajmo prvo najjednostavniji slučaj dvije tačke na krugu (diskretizacija u dvije tačke), koje se u opštem obliku mogu zapisati: $\tau/(2(a + jb))$ i $-\tau/(2(a + jb))$ [5], [7]. Za dvije posmatrane tačke, funkcija momenta signala se definiše kao:

$$M(t, \tau) = \prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq 0}}^1 x^{\text{sign}(i)(a+jb) \left(t + \frac{\tau}{2\text{sign}(i)(a+jb)}\right)}. \quad (7)$$

U skladu sa prethodnom relacijom, opšta forma vremensko-frekvencijske distribucije drugog reda za estimaciju prvog izvoda se definiše kao:

$$CTD_{N=2}^I(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq 0}}^1 x^{sign(i)(a+jb)} \left(t + \frac{\tau}{2sign(i)(a+jb)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (8)$$

Analizirajmo sada fazu momenta $M(t, \tau)$. Razvojem u Taylor-ov red faza dobija oblik:

$$\varphi_M(t, \tau) = \varphi'(t)\tau + \varphi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3!(a+jb)^2} + \varphi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5!(a+jb)^4} + \varphi^{(7)}(t) \frac{\tau^7}{2^6 7!(a+jb)^6} + \dots \quad (9)$$

Prilikom estimacije prvog izvoda faze, od interesa je samo prvi član razvoja, dok ostali dovode do rasipanja koncentracije vremensko-frekvencijske distribucije, te uzrokuju greške estimacije trenutne frekvencije. Svi članovi sa izvodima faze koji su različiti od željenog izvoda nazivaju se jednim imenom faktor rasipanja koncentracije. Izbor i broj tačaka za diskretizovanu realizaciju distribucije direktno utiče na koncentraciju.

U cilju postizanja zadovoljavajuće koncentracije u vremensko-frekvencijskom domenu posmatrano je nekoliko karakterističnih slučajeva izbora tačaka. Napomenimo da je za uklanjanje parnih izvoda faze pri estimaciji neparnih izvoda neophodno obezbijediti da su tačke simetrične u odnosu na centar kružnice (trenutak t).

1. Uzimajući $(a,b)=(1,0)$ razmatramo uticaj tačaka $\tau/2$ i $-\tau/2$, koje pripadaju jediničnom krugu (Slika 1a). Ovaj slučaj odgovara dobro poznatoj Wigner-ovoj distribuciji čiji se moment signala definiše u obliku $M(t, \tau) = x \left(t + \frac{\tau}{2} \right) x^{-1} \left(t - \frac{\tau}{2} \right)$, dok je faza momenta:

$$\varphi_M(t, \tau) = \varphi'(t)\tau + \varphi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3!} + \varphi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5!} + \varphi^{(7)}(t) \frac{\tau^7}{2^6 7!} + \dots \quad (10)$$

Primijetimo da na tačnost procjene prvog izvoda faze utiču svi viši neparni izvodi, koji mogu da uzrokuju rasipanje koncentracije oko prvog izvoda, a time i greške estimacije trenutne frekvencije. Ovo naročito važi za signale sa brzo promjenljivom faznom funkcijom.

2. Posmatrajmo tačke na imaginarnoj osi: $j\tau/2$ i $-j\tau/2$ (Slika 1a). Funkcija momenta signala se u ovom slučaju može definisati kao:

$$M(t, \tau) = \prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq 0}}^1 x^{j sign(i)} \left(t + \frac{\tau}{2j sign(i)} \right). \quad (11)$$

Faza ove funkcije sadrži iste izvode kao u slučaju Wigner-ove distribucije, te odgovarajuća distribucija realizovana u tačkama $j\tau/2$ i $-j\tau/2$ obezbjeđuje i sličnu efikasnost pri procjeni trenutne frekvencije:

$$\varphi_M(t, \tau) = \varphi'(t)\tau - \varphi^{(3)}(t)\frac{\tau^3}{2^2 3!} + \varphi^{(5)}(t)\frac{\tau^5}{2^4 5!} - \varphi^{(7)}(t)\frac{\tau^7}{2^6 7!} + \dots \quad (12)$$

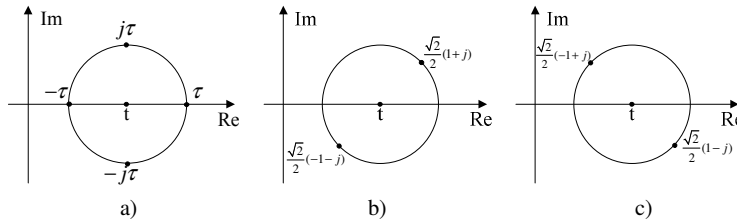
3. Značajno poboljšanje koncentracije je moguće postići ukoliko se koriste tačke na jediničnom krugu čiji je raspored dat na Slici 1b. Razvojem faze momenta signala u Taylor-ov red dobija se sljedeći izraz:

$$\varphi_M(t, \tau) = \varphi'(t)\tau - j\varphi^{(3)}(t)\frac{\tau^3}{2^2 3!} - \varphi^{(5)}(t)\frac{\tau^5}{2^4 5!} + j\varphi^{(7)}(t)\frac{\tau^7}{2^6 7!} + \dots \quad (13)$$

Primijetimo da članovi čiji se red može zapisati kao $4n - 1$ ($n = 1, 2, \dots$) sadrže kompleksnu promjenljivu j za razliku od ostalih članova, te se uvodi modifikacija momenta signala [7]:

$$M^a(t, \tau) = e^{j\text{angle}(M(t, \tau))}, \quad (14)$$

kojom se uklanja uticaj ovih izvoda faze.



Slika 1. Ilustracija tačaka na kružnici u okolini vremenskog trenutka t

3.2 DISTRIBUCIJE IV REDA ZA PROCJENU PRVOG IZVODA FAZE

Preciznost procjene trenutne frekvencije, može se poboljšati korišćenjem većeg broja tačaka, čime se povećava red distribucije. Vremensko-frekvencijska distribucija sa dva para simetričnih tačaka na jediničnom krugu se definiše kao:

$$CTD_{N=4}^I(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=-2, \\ i \neq 0}}^2 \chi^{\text{sign}(i)(a_i + jb_i)} \left(t + \frac{\tau}{4\text{sign}(i)(a_i + jb_i)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (15)$$

gdje je $a_{-2} = a_2$, $b_{-2} = b_2$, $a_{-1} = a_1$, $b_{-1} = b_1$. U ovom slučaju opšti oblik faze momenta signala dat je sljedećom relacijom:

$$\begin{aligned} \varphi_M(t, \tau) = & \varphi'(t)\tau + 2\varphi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{4^3 3!} \left[\frac{1}{(a_1 + jb_1)^2} + \frac{1}{(a_2 + jb_2)^2} \right] \\ & + 2\varphi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{4^5 5!} \left[\frac{1}{(a_1 + jb_1)^4} + \frac{1}{(a_2 + jb_2)^4} \right] + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Članovi koji sadrže više izvode faze čine faktor rasipanja koncentracije za distribuciju $CTD_{N=4}$. Kako bi smanjili uticaj viših izvoda, potrebno je izvršiti adekvatan odabir tačaka, odnosno vrijednosti a_1, a_2, b_1, b_2 . Na primjer, treći izvod faze će biti nula ako promjenjive zadovoljavaju jednačinu:

$$(a_1 + jb_1)^{-2} + (a_2 + jb_2)^{-2} = 0. \quad (17)$$

Vrijednosti $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (1, 0, 0, 1)$ (Slika 1a) zadovoljavaju gornju jednačinu, te je moguće eliminisati izvode faze reda $4n - 1$, $n = (1, 2, \dots)$. U Tabeli I su dati izrazi za faktore rasipanja koncentracije prilikom estimacije prvog izvoda za različite tačke i različiti red distribucija.

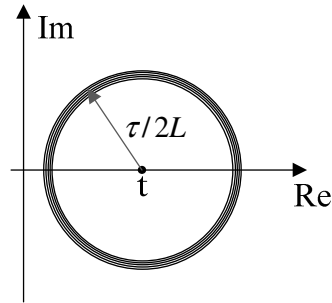
3.3 L-FORME DISTRIBUCIJA VIŠEG REDA

U slučaju izrazito nelinearne i brzo promjenjive faze signala, poboljšanje koncentracije može se postići korišćenjem analogije sa višestrukom integracijom po kružnicama sa L puta manjim poluprečnikom [5] (Slika 2). Na ovaj način, mogu se definisati odgovarajuće L -forme distribucija. Opšti oblik L -forme distribucije N -tog reda za procjenu trenutne frekvencije definiše se kao:

$$CTD_N^L(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=-\frac{N}{2} \\ i \neq 0}}^{\frac{N}{2}} \chi^{L \text{sign}(i)(a_i + jb_i)} \left(t + \frac{\tau}{NL \text{sign}(i)(a_i + jb_i)} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (18)$$

L -forme distribucija smanjuju faktor rasipanja skalirajući više izvode faze i ne povećavajući red distribucije. U slučaju $N=2$, relacija (18) predstavlja L -Wigner-ovu distribuciju. Faza odgovarajućeg momenta signala za L -Wigner-ovu distribuciju je:

$$\varphi_M(t, \tau) = \varphi'(t)\tau + \varphi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3! L^2} + \varphi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5! L^4} + \dots \quad (19)$$



Slika 2. Ilustracija višestrukih integracija po kružnicama skaliranog poluprečnika

TABELA I

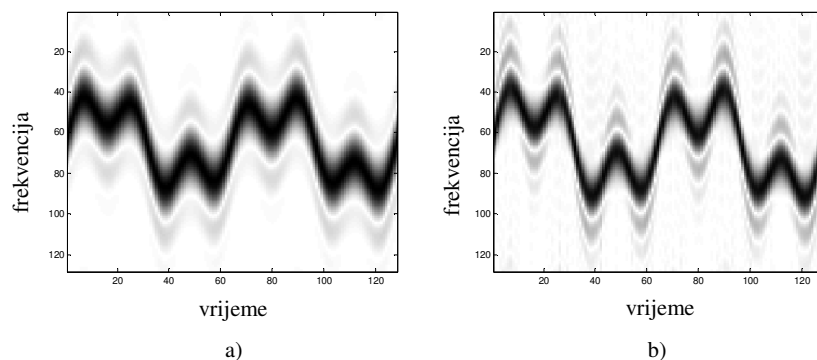
Red distribucije	Tačke	Faktor rasipanja
N=2	e^{j0} i njoj simetrična $e^{j\pi}$	$Q(t, \tau) = \varphi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3!} + \varphi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5!} + \varphi^{(7)}(t) \frac{\tau^7}{2^6 7!} + \dots$
N=2	$e^{j\pi/2}$ i njoj simetrična $e^{j3\pi/2}$	$Q(t, \tau) = -\varphi^{(3)}(t) \frac{\tau^3}{2^2 3!} + \varphi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5!} - \varphi^{(7)}(t) \frac{\tau^7}{2^6 7!} + \dots$
N=2	$e^{j\pi/4}$ i njoj simetrična	$Q(t, \tau) = -\varphi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{2^4 5!} + \varphi^{(9)}(t) \frac{\tau^9}{2^8 9!} + \dots$
N=2	L-forme	$Q(t, \tau) = \frac{\varphi^{(3)}(t)\tau^3}{2^2 L^2 3!(a+jb)^2} + \frac{\varphi^{(5)}(t)\tau^5}{2^4 L^4 5!(a+jb)^4} + \frac{\varphi^{(7)}(t)\tau^7}{2^6 L^6 7!(a+jb)^6} + \dots$
N=4	$e^{j0}, e^{j\pi/2}, e^{j\pi}, e^{j3\pi/2}$	$Q(t, \tau) = \varphi^{(5)}(t) \frac{\tau^5}{4^4 5!} + \varphi^{(9)}(t) \frac{\tau^9}{4^8 9!} + \dots$

Eksperimentalni rezultati

Posmatrajmo signal u obliku:

$$x = e^{j(4 \cos 2\pi t) + \frac{1}{3} \cos(3\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)}.$$

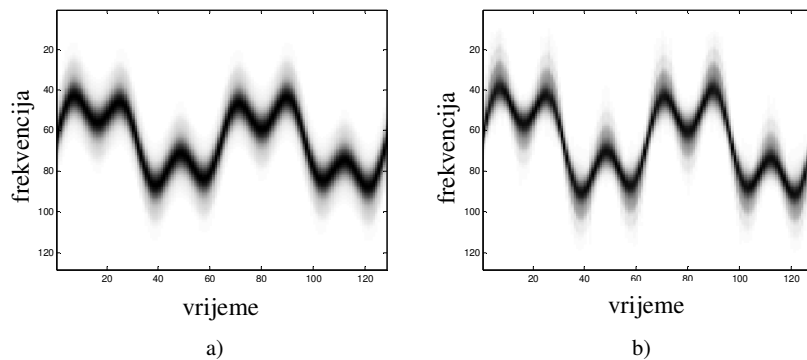
Signal je definisan u vremenskom intervalu $t \in [-1, 1]$, sa korakom $\Delta t = 1/64$. Na Slici 3, prikazan je prvi izvod faze dobijen primjenom distribucija drugog i četvrtog reda.



Slika 3. Prvi izvod faze dobijen korišćenjem distribucije a) drugog; b) četvrtog reda

Distribucija drugog reda je računata za tačke koje odgovaraju uglovima $\pi/2$ i $3\pi/2$ (Slika 1a, tačke na imaginarnoj osi), dok su za distribuciju četvrtog reda osim ove dvije tačke, uzete i tačke koje odgovaraju uglovima 0 i $\pi/2$ (Slika 1a). Korišćenjem distribucije četvrtog reda postignuto je neznatno poboljšanje rezolucije, tj. neznatno je smanjen uticaj viših izvoda faze. Kako se povećanjem broja tačaka povećava kompleksnost realizacije pomenutih distribucija, kad god je moguće koriste se distribucije manjeg reda. Pokazuje se da, prilikom procjene prvog izvoda faze, distribucija drugog reda daje zadovoljavajuće rezultate pa u tom slučaju nije potrebno uvoditi distribucije višeg reda.

Poboljšanje rezolucije moguće je postići korišćenjem L -formi distribucija, koje redukuju uticaj viših izvoda faze, a da pri tom ne povećavaju značajno kompleksnost realizacije. Na Slici 4 prikazani su rezultati dobijeni primjenom L -forme distribucije na posmatrani signal. Sa Slike 4 se vidi da je uticaj viših izvoda redukovan u odnosu na rezultate sa Slike 3. Najbolji rezultat je postignut upotrebom L -forme distribucije četvrtog reda (Slika 4b).

Slika 4. L -forma distribucija za estimaciju prvog izvoda faze a) drugog; b) četvrtog reda.

4. ESTIMACIJA DRUGOG IZVODA FAZE

Drugi izvod faze signala predstavlja brzinu promjene trenutne frekvencije. Ukoliko je vrijednost parametra $K=2$ u relaciji (3), dobija se izraz za drugi izvod faze signala u obliku:[7]

$$\varphi^{(2)}(t) = \frac{2!}{2\pi\tau^2} \int_0^{2\pi} \varphi(t + \tau e^{j\theta}) e^{-2j\theta} d\theta. \quad (20)$$

Diskretizacijom prethodne relacije uz korišćenje N tačaka dobija se sljedeći izraz:

$$\frac{\varphi^{(2)}(t)\tau^2}{2!} = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi\left(t + \frac{\tau}{N} e^{j2\pi k/N}\right) e^{2(-\frac{j2\pi k}{N})}. \quad (21)$$

U cilju procjene drugog izvoda faze signala, definišimo moment signala kao:

$$M(t, \sqrt{\tau}) = \prod_{k=0}^{N-1} x^{e^{2(-\frac{j2\pi k}{N})}} \left(t + \sqrt{\frac{2! \tau}{N}} e^{\frac{j2\pi k}{N}} \right). \quad (22)$$

Odgovarajuća distribucija za procjenu drugog izvoda faze dobija se kao Fourier-ova transformacija momenta signala $M(t, \sqrt{\tau})$:

$$CTD^H(t, \omega) = \int_0^{\infty} M(t, \sqrt{\tau}) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} M(t, \tau) e^{-j\omega\tau^2} d\tau. \quad (23)$$

Najjednostavniji slučaj dobija se korišćenjem dvije tačke simetrične u odnosu na centar kružnice:

$$CTD_{N=2}^H(t, \omega) = \int_0^{\infty} \prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq 0}}^1 x^{(a+jb)^2} \left(t + \frac{\tau}{\text{sign}(i)(a+jb)} \right) e^{-j\omega\tau^2} d\tau. \quad (24)$$

Za eliminaciju neparnih izvoda faze, x nije potrebno stepenovati znakom promjenjive i . Opšti oblik faze momenta signala dobija se primjenom razvoja funkcije u Taylor-ov red na sljedeći način:

$$\varphi_M(t, \tau) = 2(a + jb)^2 \varphi(t) + \varphi^{(2)}(t) \tau^2 + 2\varphi^{(4)}(t) \frac{\tau^4}{4!(a+jb)^2} + 2\varphi^{(6)}(t) \frac{\tau^6}{6!(a+jb)^4} \dots \quad (25)$$

Generalna forma distribucije N -tog reda (za N tačaka diskretizacije) može se definisati kao:

$$CTD_N^H(t, \omega) = \int_0^\infty \prod_{\substack{i=-\frac{N}{2} \\ i \neq 0}}^{\frac{N}{2}} x^{(a_i + jb_i)^2} \left(t + \text{sign}(i) \sqrt{\frac{2}{N(a_i + jb_i)}} \tau \right) e^{-j\omega \tau^2} d\tau. \quad (26)$$

Posmatrajmo kako se mijenja faktor rasipanja koncentracije u zavisnosti od izbora vrijednosti parametara a i b :

1. Ako se uzmu tačke sa jediničnog kruga čiji su realni i imaginarni dijelovi $a = 1$, $b = 0$, dobija se O'Shea distribucija [8]:

$$CTD_{N=2}^H(t, \omega) = \int_0^\infty \prod_{\substack{i=-1 \\ i \neq 0}}^1 x(t + \text{sign}(i)\tau) e^{-j\omega \tau^2} d\tau. \quad (27)$$

dok je faza odgovarajućeg momenta signala:

$$\varphi_M(t, \tau) = 2\varphi(t) + \varphi^{(2)}(t) \tau^2 + 2\varphi^{(4)}(t) \frac{\tau^4}{4!} + 2\varphi^{(6)}(t) \frac{\tau^6}{6!} + 2\varphi^{(8)}(t) \frac{\tau^8}{8!} + \dots \quad (28)$$

Primijetimo da na tačnost estimacije drugog izvoda utiču članovi koji sadrže četvrti i više izvode faze.

2. Interesantno je posmatrati slučaj diskretizacije korišćenjem tačaka $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j)$. Odgovarajuća distribucija se definiše na sljedeći način:

$$CTD_{N=2}^H(t, \omega) = \int_0^\infty x^j \left(t + \frac{\tau}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)} \right) x^j \left(t - \frac{\tau}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)} \right) e^{-j\omega \tau^2} d\tau. \quad (29)$$

Faza momenta signala u okviru prethodne distribucije je:

$$\begin{aligned} \varphi_M(t, \tau) = & 2j\varphi(t) + \varphi^{(2)}(t) \tau^2 - 2j\varphi^{(4)}(t) \frac{\tau^4}{4!} - 2\varphi^{(6)}(t) \frac{\tau^6}{6!} + 2j\varphi^{(8)}(t) \frac{\tau^8}{8!} \\ & + 2\varphi^{(10)}(t) \frac{\tau^{10}}{10!} + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

U cilju eliminisanja članova koji sadrže kompleksnu primjenljivu j , što će značajno redukovati rasipanje koncentracije oko drugog izvoda faze, umjesto momenta signala $M(t, \tau) = e^{j\varphi_M(t, \tau)}$, koristimo modifikovani izraz $M^a(t, \tau) = e^{j\text{angle}(M(t, \tau))}$. Na ovaj način smo eliminisali uticaj četvrtog, osmog izvoda, itd.

3. Kao i u slučaju procjene prvog izvoda faze signala, preciznost estimacije se može značajno poboljšati povećanjem reda distribucije. Tako se za $N=4$ definiše distribucija:

$$CTD_{N=4}^H = \int_0^\infty \prod_{\substack{i=-2 \\ i \neq 0}}^2 x^{(a_i + jb_i)^2} \left(t + \frac{\tau}{\sqrt{2} \text{sign}(i)(a_i + jb_i)} \right) e^{-j\omega\tau^2} d\tau, \quad (31)$$

sa fazom momenta signala:

$$\begin{aligned} \varphi_M(t, \tau) = & 2\varphi(t)[(a_1 + jb_1)^2 + (a_2 + jb_2)^2] + \varphi^{(2)}(t)\tau^2 + 2\varphi^{(4)}(t) \frac{\tau^4}{4!\sqrt{2^4}} \left[\frac{1}{(a_1 + jb_1)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(a_2 + jb_2)^2} \right] + 2\varphi^{(6)}(t) \frac{\tau^6}{6!\sqrt{2^6}} \left[\frac{1}{(a_1 + jb_1)^4} + \frac{1}{(a_2 + jb_2)^4} \right] + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

S obzirom da estimiramo drugi izvod faze, od interesa nam je samo drugi član u razvoju. Dakle, da bi eliminisali uticaj viših izvoda, traže se tačke za koje će važiti uslovi:

$$\begin{aligned} (a_1 + jb_1)^2 + (a_2 + jb_2)^2 &= 0, \\ (a_1 + jb_1)^{-2} + (a_2 + jb_2)^{-2} &= 0, \\ (a_1 + jb_1)^{-4} + (a_2 + jb_2)^{-4} &= 0, \\ (a_1 + jb_1)^{-6} + (a_2 + jb_2)^{-6} &= 0 \dots \end{aligned}$$

Možemo zaključiti da ne postoji par tačaka koje su rješenje prethodnog sistema jednačina. Najveći uticaj na slabljenje koncentracije imaju izvodi faze koji su susjedni onom koji želimo da estimiramo, te je korisno da te članove eliminišemo iz faktora rasipanja koncentracije. Stoga se problem svodi na rješavanje uprošćenog sistema jednačina:

$$\begin{aligned} (a_1 + jb_1)^2 + (a_2 + jb_2)^2 &= 0, \\ (a_1 + jb_1)^{-2} + (a_2 + jb_2)^{-2} &= 0. \end{aligned}$$

Kao rješenje dobijaju se tačke $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (1, 0, 0, 1)$ koje uklanjaju izvode reda $4n$, $n = 0, 1, 2 \dots$, te je faza momenta:

$$\varphi_M(t, \tau) = \varphi^{(2)}(t)\tau^2 + \varphi^{(6)}(t) \frac{4\tau^6}{6!\sqrt{2^6}} + \varphi^{(10)}(t) \frac{4\tau^{10}}{10!\sqrt{2^{10}}} + \dots \quad (33)$$

Isti efekat se može dobiti ako se umjesto distribucije četvrtog reda, koristi distribucija drugog reda, koja je značajno jednostavnija za realizaciju. Prilikom realizacije distribucije uzeta je tačka na jediničnom krugu kojoj odgovara ugao $7\pi/4$, kao i njoj simetrična tačka (Slika 1c). Drugim riječima, koordinate tačke su: $a = 0$, $b = \frac{1}{\sqrt{j}}$. U ovom slučaju distribucija je definisana izrazom:

$$CTD_{N=2}^I(t, \omega) = \int_0^\infty x^{-j}(t + \sqrt{j}\tau)x^{-j}(t - \sqrt{j}\tau)e^{-j\omega\tau^2} d\tau. \quad (34)$$

Faza momenta je oblika:

$$\varphi_M(t, \tau) = -2j\varphi(t) + \varphi^{(2)}(t)\tau^2 + 2j\varphi^{(4)}(t)\frac{\tau^4}{4!} - 2\varphi^{(6)}(t)\frac{\tau^6}{6!} - 2j\varphi^{(8)}(t)\frac{\tau^8}{8!} + \dots, \quad (35)$$

pa će, uz određenu modifikaciju, sadržati iste izvode faze kao u slučaju distribucije četvrtog reda. Naime, kako bi se eliminisali izvodi reda $4n$ koji sadrže kompleksnu promjenljivu j , opet koristimo modifikaciju $M^a(t, \tau) = e^{jangle(M(t,\tau))}$, tako da je odgovarajuća distribucija definisana kao:

$$CTD_{N=2}^{a,II}(t, \omega) = \int_0^\infty M^a(t, \tau)e^{-j\omega\tau^2} d\tau. \quad (36)$$

U nastavku je data L -forma distribucija za procjenu drugog izvoda faze:

$$CTD_N^L(t, \omega) = \int_{-\infty}^\infty P(\theta)CTD_{\frac{L}{2}}^N(t, \omega + \theta)CTD_{\frac{L}{2}}^N(t, \omega - \theta)d\theta, \quad (37)$$

gdje se za $L=1$ dobija se osnovni oblik distribucije.

TABELA II

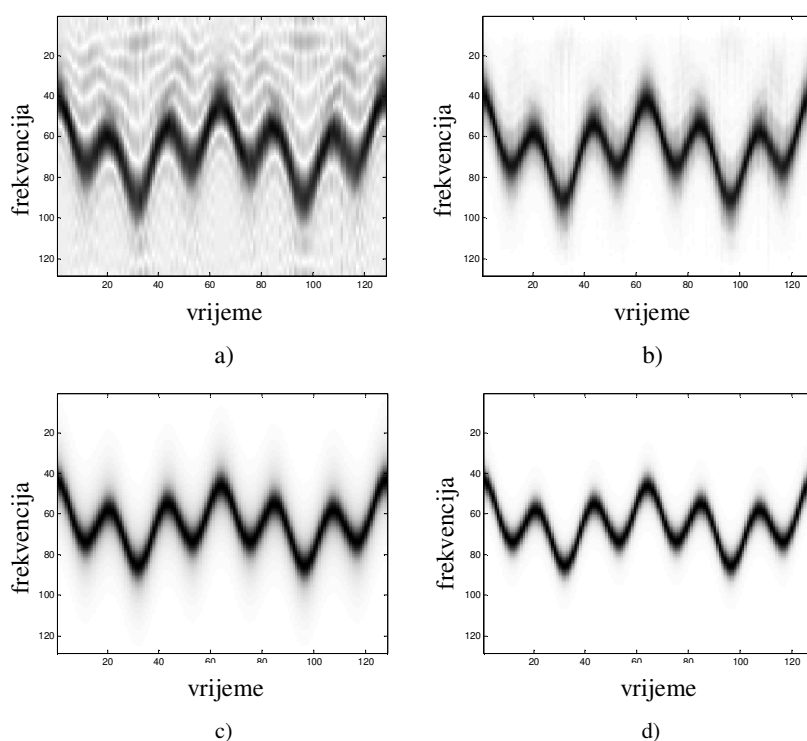
Red distribucije	Tačke	Faktor rasipanja
N=2	e^{j0} i njoj simetrična $e^{j\pi}$	$Q(t, \tau) = 2\varphi^{(4)}(t)\frac{\tau^4}{4!} + 2\varphi^{(6)}(t)\frac{\tau^6}{6!} + 2\varphi^{(8)}(t)\frac{\tau^8}{8!} + \dots$
N=2	$e^{j\pi/4}$ i njoj simetrična $e^{j5\pi/4}$	$Q(t, \tau) = -2\varphi^{(6)}(t)\frac{\tau^6}{6!} + 2\varphi^{(10)}(t)\frac{\tau^{10}}{10!} + \dots$
N=4	$e^{j0}, e^{j\pi/2}, e^{j\pi}, e^{j3\pi/2}$	$Q(t, \tau) = \varphi^{(6)}(t)\frac{4\tau^6}{6!\sqrt{2^6}} + \varphi^{(10)}(t)\frac{4\tau^{10}}{10!\sqrt{2^{10}}} + \dots$

Eksperimentalni rezultati

Za estimaciju drugog izvoda faze uzet je isti oblik signala kao i prilikom procjene prvog izvoda faze, tj.

$$x = e^{j(4 \cos 2\pi t) + \frac{1}{3} \cos(3\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)}$$

Na Slici 5 prikazani su rezultati dobijeni korišćenjem distribucija drugog i četvrtog reda, kao i njihovih L -formi. Sa Slike 5b se vidi da se upotrebom L -forme distribucije drugog reda postižu dobri rezultati i da ona značajno poboljšava koncentraciju u odnosu na standardnu distribuciju drugog reda sa Slike 5a. Takođe primijetimo da L -forma distribucije drugog reda daje približno isti rezultat kao distribucija četvrtog reda. Koncentracija je djelimično poboljšana korišćenjem L -forme distribucije četvrtog reda.



Slika 5. Drugi izvod faze dobijem korišćenjem; a) distribucije drugog reda; b) L -forme distribucije drugog reda; c) distribucije četvrtog reda; d) L -forme distribucije četvrtog reda;

5. ESTIMACIJA TREĆEG IZVODA FAZE

Korišćenjem distribucije drugog reda i već pomenute modifikacije momenta signala, možemo estimirati i treći izvod faze [9]. Forma distribucije drugog reda za procjenu trećeg izvoda faze signala može se definisati u obliku:

$$CTD_{N=2}^{III}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=-1, \\ i \neq 0}}^1 x^{\text{sign}(i)(a+jb)^3} \left(t + \frac{\sqrt[3]{3}\tau}{\text{sign}(i)(a+jb)} \right) e^{-j\omega\tau^3} d\tau. \quad (38)$$

Faza momenta za proizvoljne tačke $(a+jb)$ i $(-a-jb)$ sa jediničnog kruga data je izrazom:

$$\begin{aligned} \varphi_M(t, \tau) &= 2\varphi'(t)\sqrt[3]{3}\tau(a+jb)^2 + \varphi^{(3)}(t)\tau^3 + 2\varphi^{(5)}(t)\frac{\sqrt[3]{3^5}\tau^5}{5!(a+jb)^2} \\ &+ 2\varphi^{(7)}(t)\frac{\sqrt[3]{3^7}\tau^7}{7!(a+jb)^4} + 2\varphi^{(9)}(t)\frac{\sqrt[3]{3^9}\tau^9}{9!(a+jb)^6} + 2\varphi^{(11)}(t)\frac{\sqrt[3]{3^{11}}\tau^{11}}{11!(a+jb)^8} + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Slično kao kod estimacije prvog i drugog izvoda faze, cilj je eliminisati što više susjednih izvoda. Da bismo eliminisali članove koji sadrže prvi i peti izvod faze iz (39), treba izabrati tačke za koje važi:

$$\begin{aligned} (a+jb)^2 &= jA, \\ (a+jb)^{-2} &= jB. \end{aligned}$$

gdje su A i B konstante. Pokazuje se da tačka $a+jb = \sqrt{j}$ (i njoj simetrična tačka na jediničnom krugu), zadovoljava obje jednačine. Uvrštavanjem tačke $a+jb = \sqrt{j}$ u jednačinu (38), izraz za fazu momenta postaje:

$$\begin{aligned} \varphi_M(t, \tau) &= j2\varphi'(t)\sqrt[3]{3}\tau + \varphi^{(3)}(t)\tau^3 - j2\varphi^{(5)}(t)\frac{\sqrt[3]{3^5}\tau^5}{5!} \\ &- 2\varphi^{(7)}(t)\frac{\sqrt[3]{3^7}\tau^7}{7!} + j2\varphi^{(9)}(t)\frac{\sqrt[3]{3^9}\tau^9}{9!} + 2\varphi^{(11)}(t)\frac{\sqrt[3]{3^{11}}\tau^{11}}{11!} + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Vidimo da se uz prvi izvod javlja kompleksna promjenljiva j , kao i uz peti, deveti, tj. uz izvode reda $4n+1$, $n = 0,1,2, \dots$ Ove izvode faze moguće je eliminisati modifikacijom momenta $M^a(t, \tau) = e^{j\text{angle}(M(t, \tau))}$.

Povećanjem reda distribucije se postiže poboljšanje koncentracije. Opšti oblik distribucije četvrtog reda za estimaciju trećeg izvoda faze je:

$$CTD_{N=4}^{III}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=-2, \\ i \neq 0}}^2 x^{\text{sign}(i)(a_i+jb_i)^3} \left(t + \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\tau}{\text{sign}(i)(a_i+jb_i)} \right) e^{-j\omega\tau^3} d\tau, \quad (41)$$

gdje je $a_{-2} = a_2$, $b_{-2} = b_2$, $a_{-1} = a_1$, $b_{-1} = b_1$. Moment faze signala je u opštem oblik dat izrazom:

$$\begin{aligned} \varphi_M(t, \tau) = & \\ & 2\varphi'(t) \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \tau [(a_1 + jb_1)^2 + (a_2 + jb_2)^2] + \varphi^{(3)}(t) \tau^3 + 2\varphi^{(5)}(t) \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^5} \tau^5}{5!} \left[\frac{1}{(a_1 + jb_1)^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{(a_2 + jb_2)^2} \right] + 2\varphi^{(7)}(t) \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^7} \tau^7}{7!} \left[\frac{1}{(a_1 + jb_1)^4} + \frac{1}{(a_2 + jb_2)^4} \right] + 2\varphi^{(9)}(t) \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^9} \tau^9}{9!} \left[\frac{1}{(a_1 + jb_1)^6} + \right. \\ & \left. \frac{1}{(a_2 + jb_2)^6} \right] + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

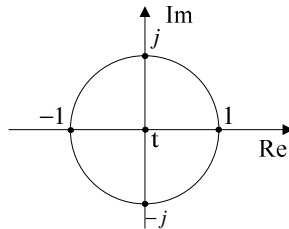
Pogodan izbor tačaka na kružnici, koji omogućuje eliminisanje uticaja prvog i petog izvoda prilikom estimacije trećeg izvoda faze, dobija se rješavanjem sistema jednačina:

$$\begin{aligned} (a_1 + jb_1)^2 + (a_2 + jb_2)^2 &= 0, \\ (a_1 + jb_1)^{-2} + (a_2 + jb_2)^{-2} &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje sistema su tačke $(a_1 + jb_1) = 1$ i $(a_2 + jb_2) = j$, i njima simetričan par tačaka (Slika 6), za koje distribucija i faza momenta dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} CTD_{N=4}^{III}(t, \omega) = & \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \tau) x^{-1}(t - \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \tau) x^{-j}(t - j \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \tau) x^j(t + j \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \tau) e^{-j\omega \tau^3} d\tau, & \quad (43) \end{aligned}$$

$$\varphi_M(t, \tau) = \varphi^{(3)}(t) \tau^3 + 4\varphi^{(7)}(t) \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^7} \tau^7}{7!} + 4\varphi^{(11)}(t) \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^{11}} \tau^{11}}{11!} + \dots \quad (44)$$



Slika 6. Tačke na jediničnom krugu za slučaj distribucije četvrtog reda

Poboljšanje koncentracije prilikom procjene trećeg izvoda faze postiže se uvođenjem L -formi distribucija, čija je opšta forma definisana izrazom (37).

U Tabeli III dati su faktori rasipanja za distribucije drugog i četvrtog reda prilikom estimacije trećeg izvoda faze.

TABELA III

Red distribucije	Tačke	Faktor rasipanja
N=2	$e^{j\pi/4}$ i njoj simetrična $e^{j5\pi/4}$	$Q(t, \tau) = -2\varphi^{(7)}(t) \frac{\sqrt[3]{3^7} \tau^7}{7!} + 2\varphi^{(11)}(t) \frac{\sqrt[3]{3^{11}} \tau^{11}}{11!} + \dots$
N=4	$e^{j0}, e^{j\pi/2}$ i njima simetrične	$Q(t, \tau) = 4\varphi^{(7)}(t) \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{2}^7} \tau^7}{7!} + 4\varphi^{(11)}(t) \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{2}^{11}} \tau^{11}}{11!} + \dots$

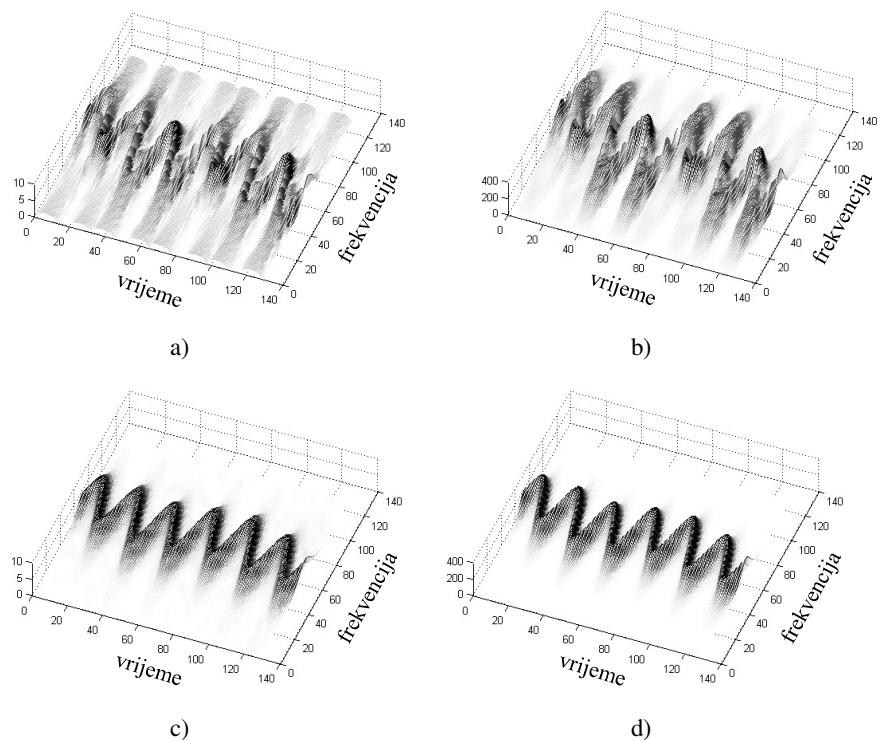
Eksperimentalni rezultati

Posmatra se treći izvod faze signala:

$$x = e^{j(4 \cos 2\pi t) + \frac{1}{3} \cos(3\pi t) + \frac{2}{3} \cos(6\pi t)}$$

Pokazano je da se treći izvod faze može estimirati korišćenjem distribucije drugog reda uz aproksimaciju momenta faze u obliku $M^a(t, \tau) = e^{j \text{angle}(M(t, \tau))}$ (Slika 7a). Na Slici 7b prikazana je L -forma distribucije drugog reda za estimaciju trećeg izvoda. Sa slike se može vidjeti da L -forma značajno smanjuje uticaj ostalih izvoda faze.

Značajno poboljšanje koncentracije postiže se povećanjem reda distribucije. Na slici 7c i 7d prikazani su rezultati dobijeni korišćenjem distribucije 4-tog reda i njene L -forme, respektivno.



Slika 7. Estimacija trećeg izvoda faze; a) distribucija drugog reda; b) L -forma distribucije drugog reda; c) distribucija četvrtog reda; d) L -forma distribucije četvrtog reda.

6. ZAKLJUČAK

U radu je dat opis visoko-koncentrisanih distribucija za analizu signala sa brzo promjenljivom trenutnom frekvencijom, čiji je cilj estimacija izvoda faze različitog reda. Posmatrane distribucije su zasnovane na korišćenju kompleksnog argumenta vremena. Polazeći od osnova kompleksne analize, poboljšanje koncentracije se postiže povećanjem broja tačaka prilikom diskretizacije, što po analogiji odgovara povećanju reda distribucije. Drugi način poboljšanja koncentracije je povećanje broja integracija po kružnici manjeg poluprečnika, ne povećavajući broj tačaka. Na taj način su definisane L -forme distribucija. Kao rezultat ove analize definisan je opšti oblik distribucija sa kompleksnim argumentom, za proizvoljni red N . Ujedno, definisana je i opšta L -forma distribucija sa kompleksnim argumentom (za različite izvode faze). Svakako, povećanjem reda distribucije povećava se kompleksnost njene realizacije. Zbog toga je cilj da se za procjenu izvoda faze, koriste distribucije što je moguće nižeg reda. U radu je pokazano da se procjena prva tri izvoda faze može vršiti korišćenjem distribucija drugog reda uz adekvatan izbor kompleksnih tačaka na jediničnom krugu i modifikacije momenta signala. Dalje poboljšanje rezultata

može se ostvariti korišćenjem L -formi ovih distribucija, a u nekim slučajevima ipak je potrebno koristiti distribucije višeg reda.

LITERATURA

- [1] L. Cohen, "Time-Frequency Distributions-A Review", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 77, No. 7, July 1989.
- [2] F. Hlawatsch and G. F. Boudreaux-Bartels, "Linear and quadratic time-frequency signal representations", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 9, No. 2, pp. 21-67, Apr. 1992.
- [3] S. Stankovic, L.J. Stankovic, "Introducing time-frequency distribution with a "complex-lag" argument", *Electronics Letters*, Volume 32, Issue 14, July 1996.
- [4] L.J. Stanković, "Time-frequency distributions with complex argument", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 50, No. 3, pp. 475-486, March 2002.
- [5] S. Stankovic, N. Zaric, I. Orovic, C. Ioana, "General form of time-frequency distribution with complex-lag argument", *Electronics Letters* (ISSN:0013-5194), Volume 44, Issue 11, May 2008, Page(s) 699-701.
- [6] S. Stanković, I. Orović, C. Ioana, "Effects of Cauchy Integral Formula Discretization on the Precision of IF Estimation: Unified Approach to Complex-lag Distribution and its L-Form", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 16, No. 4, pp. 307-310, Apr. 2009.
- [7] S. Stanković, I. Orović, "Time-Frequency Rate Distributions with Complex-lag Argument", *Electronics Letters* Vol. 46, No. 13, pp. 950-952, June 2010.
- [8] P. O'Shea, "A New Technique for Instantaneous Frequency Rate Estimation", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 9, No. 8, August 2002, pp. 251-252.
- [9] C. Cornu, S. Stanković, C. Ioana, A. Quinquis, L.J. Stanković, "Generalized Representation of Phase Derivatives for Regular Signals", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 55, No. 10, pp. 4831-4838, September 2007.